→ Cálculo - Ficha 3

2-

a)

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \underset{x \neq 1}{x-1 \neq 0}\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)'(x-1) - (x-1)'(x^2-1)}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2+1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2}$$

$$D'_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

3-

$$\lim_{x \to 5} \sqrt{x-1} = 2$$

$|\sqrt{x-1} - 2| < 1$ sempre que $0 < |x-5| < \varepsilon$

- 1º Etapa

$$|\sqrt{x-1} - 2| < 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - 2 < 1 \\ \sqrt{x-1} - 2 > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} < 3 \\ \sqrt{x-1} > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 < 9 \\ x-1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 10 \\ x > 2 \end{cases}$$

4-

a) $h(x) = K$ $(K \in \mathbb{R}$ $\qquad \lim_{x \to a} h(x) = K$

$$\lim_{x \to a} h(x) = K$$

$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D_h : 0 < |x-a| < \varepsilon \Rightarrow |h(x) - K| < \varepsilon$

e) $\lim_{x \to 2} (2x-1) = 3$

$f(x) = 2x - 1$, $D_f = \mathbb{R}$

$a = 2 \in D_f$

$l = 3$

C. aux

$|f(x) - l| < \delta \Leftrightarrow |(2x-1) - 3| < \delta$

$\Leftrightarrow |(2x-4)| < \delta \Leftrightarrow 2|x-2| < \delta$

$\Leftrightarrow |x-2| < \frac{\delta}{2} = \varepsilon$

• Seja $\delta > 0$ qualquer e tome-se $\varepsilon = \frac{\delta}{2} > 0$. Ora

$|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\delta}{2} \Leftrightarrow 2|x-2| < \delta \Leftrightarrow |(2x-4)| < \delta$

$\Leftrightarrow |(2x-1)-3| < \delta \Rightarrow |f(x)-3| < \delta$ isto é $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

5 -

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$a = +\infty$

$l = 0$

$|f(x) - l| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < \delta = \varepsilon$

Seja $\delta > 0$ qualquer e tome-se $\varepsilon = \delta > 0$ Ora

$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \delta$

isto é, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

5-

b) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} \right) = \infty$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$a = 0 \notin D_f \in D'_f$

$l = \infty$

1

$\frac{7-5}{2}$

7-

$\lim_{x \to 4} \frac{f(x)-5}{x-2} = 1$ $\lim_{x \to 4} f(x) = ?$
$= 7$

8-

$\cos \beta < \frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta} < 1$

$-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$, $\beta \neq 0$

Como

$\lim_{x \to 0} \cos \beta = 1$

$\lim_{x \to 0} 1 = 1$

$=$ Pelo T. da função Enquadrada

$\lim_{\beta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta} = 1$

10 -

a) $g(2) = ?$ • Não posso concluir nada, nem sequer se $2 \in D_h$ ou $2 \in D_g$

$h(2) = ?$

b) $f(2) = 0$? Pode ser, mas também pode ser qualquer outro nº real ou nem sequer estar definido ($x\,2 \notin D_f$)

c) $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$? Não, pois contraria o Teorema do enquadramento

11 -

a) $\lim_{x \to 3} \frac{3}{x+1}$

Sabemos que:

$\lim_{x \to 3} 3 = 3$

$\lim_{x \to 3} x = 3$ $\Big\rangle$ $\lim_{x \to 3} (x+1) = 4 \neq 0$ $\Big\rangle$ $\lim_{x \to 3} \frac{3}{x+1} = \frac{\lim 3}{\lim (x+1)} = \frac{3}{4}$

$\lim_{x \to 3} 1 = 1$

aritmética do limite

b) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 \left(1 - \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{x}{x^2}\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$

C. aux

$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$

11 -

c) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x^2+100} - 10}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x^2+100} - 10)(\sqrt{x^2+100} + 10)}{x^2(\sqrt{x^2+100} + 10)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 100 - 100}{x^2(\sqrt{x^2+100} + 10)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+100} + 10)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+100} + 10}$

$= \frac{1}{\sqrt{100} + 10} = \frac{1}{20}$

d) $\lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{x}{|x|}\right) = \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} 1 + \frac{x}{x} \\ \lim_{x \to 0^-} 1 + \frac{x}{-x} \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases}$ Logo o limite não existe

- Não existe pois pelo T. unicidade $\lim_{x \to 0^+} 1 + \frac{x}{|x|} = 2 \neq \lim_{x \to 0^-} 1 + \frac{x}{-x} = 0$

não existe limite

e) $\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$ Logo não existe limite

$\lim_{x \to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$

f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{2x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(1 - \frac{1}{x})}{x(2 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}$

g) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{4x^3 - x^2 + x + 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3(3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3})}{x^3(4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3})} = \frac{3}{4}$

h) $\lim_{x \to 3} \sqrt{|x-3|} = \begin{cases} \lim_{x \to 3^+} \sqrt{|x-3|} \\ \lim_{x \to 3^-} \sqrt{|x-3|} \end{cases} = \begin{cases} \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} \\ \lim_{x \to 3^-} \sqrt{-(x-3)} \end{cases} \begin{matrix} \sqrt{0} \\ \sqrt{0} \end{matrix} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1} = \lim \dfrac{x^2\sqrt{\frac{1}{x^3}}}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{0}{1+0} = 0$

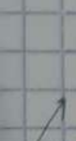
12- $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$

$\to$ a.v

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

· f é contínua em todo o seu domínio por resultar de operações entre funções contínuas

· -2 é ponto de descontinuidade



$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x+3}{x+2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

logo -2 é assíntota vertical do gráfico $f(x)$.

$\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x+3}{x+2} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

12-

Cont.

- a.h.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = 1$$

Assim $y=1$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f

13-

a) $$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(1)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2-4x-3}{x-3} = \frac{-6}{0} = -\infty$$

b) $$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-1} = \lim \frac{x^2-4x-3}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

c) $$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim \frac{x^2-4x-3}{x-1} = \frac{-6}{0} = -\infty$$

d) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2-4x-(x_0^2-4x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2-4x-x_0^2+4x_0}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2-4x-x_0^2+4x_0}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2-x_0^2-(4x-4x_0)}{x-x} =$$

$$= \lim_{\substack{x-x_0 \to 0 \\ y}} \frac{y^2-4y}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{y(y-4)}{y} = 0-4 = -4$$