→ Cálculo - Ficha 6

1-

a) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\quad$ sse $u_n = \frac{1}{n}$

$\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |u_n - 0| < \delta$

c. aux

$|u_n - 0| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta \Rightarrow \frac{1}{n} < \delta \Rightarrow n > \boxed{\frac{1}{\delta}} \to p$

$n > \frac{1}{\delta} > p$

• Seja $\delta > 0$ qualquer e tome-se $\frac{1}{\delta} > p$

Então se $n > \frac{1}{\delta} > p$ vem

$|u_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{\delta}} = \delta$

$n > \frac{1}{\delta}$

$\Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{1/\delta}$ isto é $\lim_{n} \frac{1}{n} = 0$

7-

b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

- quatro primeiros somas da sucessão das somas parciais

$S_1 = 1$ | $u_1 = 1$

$S_2 = 1 - \frac{1}{2}$ | $u_2 = -\frac{1}{2}$

$S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ | $u_3 = \frac{1}{3}$

$S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ | $u_4 = -\frac{1}{4}$

$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

$\sum_{n=1}$

11 -

a) $\sum_{n\geq 1} \left[\arccos\left(\frac{1}{n+1}\right) - \arccos\left(\frac{1}{n+2}\right)\right]$

• Termo geral da sucessão gerada: $a_n = \arccos\left(\frac{1}{n+1}\right) - \arccos\left(\frac{1}{n+2}\right)$

• Termo geral da sucessão b: $b_n = \arccos\left(\frac{1}{n+1}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

• Sucessão de somas parciais

$s_1 = a_1 = b_1 - b_2$

$s_2 = a_1 + a_2 = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) = b_1 - b_3$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) = b_1 - b_4$

$\vdots$

$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 - b_{n+1}$

• Termo geral da sucessão das somas parciais

$s_n = b_1 - b_{n+1}$

→ Convergência da série $\sum_{n\geq 1} a_n$

• A série converge se existir

$S \in \mathbb{R}$, $S = \lim_n s_n = \lim_n [b_1 - b_{n+1}]$

$= \lim_n \left[\arccos\frac{1}{2} - \arccos\overset{\to 0}{\left(\frac{1}{n+1+1}\right)}\right]$

$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6}$

• A série dada converge e tem por soma $-\frac{\pi}{6}$

b) • O termo geral da sucessão das somas parciais de uma série de Mengoli é $s_n = b_1 - b_{n+1}$

Logo, por definição a série converge se:

$$\exists S \in \mathbb{R}: \; S = \lim_n s_n$$

$$= \lim_n \left[b_1 - b_{n+1}\right] = b_1 - \lim_n b_{n+1}$$

12-

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$

• Termo geral da sucessão geradora: $u_n = \frac{1}{n^2+1} \rightsquigarrow f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

• $\lim_n u_n = \lim_n \frac{1}{n^2+1} = 0$ nada se pode concluir sobre a convergência da série

→ Apliquemos o critério do integral

Seja $f: [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

• A função é:

- contínua: é uma função racional
- positiva: $x^2+1>0$
- decrescente: $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0$

• Além disso, $\forall n \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{n^2+1} = u_n$

Ora,

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \left[\underbrace{\operatorname{arctg} b}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{\frac{\pi}{4}}\right]$$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ isto é o integral impróprio é convergente

• Assim, pelo critério do integral $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2+1}$ converge

12 -

b) $\sum_{n \geq 1} n\, e^{-n^2}$

• Termo geral da sucessão geradora $u_n = n\, e^{-n^2}$

• $\lim_n u_n = \lim_n n\, e^{-n^2} = \lim_n \frac{n}{e^{n^2}} \underset{R.L}{=} 0$

→ Apliquemos o critério do Integral

Seja $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{n}{e^{n^2}}$

• A função é:
- contínua pois é uma função racional
- positiva: $n > 0$ e $e^{n^2} > 0$
- decrescente: $f'(x) = \frac{1 - 2n^2}{e^{n^2}} < 0$

$\left(\frac{n}{e^{n^2}}\right)' = \frac{n' \times e^{n^2} - n \times (e^{n^2})'}{(e^{n^2})^2}$

$= \frac{e^{n^2} - 2n^2 e^{n^2}}{(e^{n^2})^2}$

$= \frac{e^{n^2}(1 - 2n^2)}{(e^{n^2})^2}$

$= \frac{1 - 2n^2}{e^{n^2}} < 0$

• Além disso $\forall n \in \mathbb{R}$, $f(n) = \frac{n}{e^{n^2}} = u_n$

Ora $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b n\, e^{n^{-2}}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{n^2}{4} e^{n^{-2}}\right]_1^b =$

$= \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{b^2}{4} e^{b^{-2}} - \frac{1^2}{4} e^{1^{-2}}\right] = 0 - \frac{1}{4} e$ isto é, o integral impróprio é convergente.

$(e^{n^2})' = -2n^{-3}$

• C. aux

$\int n e^{n^{-2}} = \frac{n^2}{2} e^{n^{-2}} - \int \frac{n^2}{2} (2n^{-3} e^{n^{-2}})$

$= \frac{n^2}{2} e^{n^{-2}} - \int n\, e^{n^{-2}}$

$f'(x) = n \Rightarrow f(x) = \frac{n^2}{2}$

$g(x) = e^{n^{-2}} \Rightarrow g'(x) = -2n^{-3} e^{n^{-2}}$

$\int n\, e^{n^{-2}} = \frac{n^2}{4} e^{n^{-2}}$

Seja $I = \int n\, e^{n^{-2}}$

$I = \frac{n^2}{2} e^{n^{-2}} - I \Rightarrow 2I = \frac{n^2}{2} e^{n^{-2}} \Rightarrow I = \frac{n^2}{4} e^{n^{-2}} \Rightarrow$

16 -

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$

• Termo geral da sucessão geradora: $u_n = \frac{5}{5n-1}$

• $\lim_n u_n = \lim_n \frac{5}{5n-1} = 0$ nada se conclui

• Por sugestão do enunciado usa-se um critério de comparação

$u_n = \frac{5}{5n-1} = \frac{1}{n-\frac{1}{5}} > \frac{1}{n}$ pois $0 < n - \frac{1}{5} < n \Rightarrow \frac{1}{n-\frac{1}{5}} > \frac{1}{n}$

Obtemos

$u_n > v_n$ $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ que é a série harmónica que se sabe que diverge

Pelo 1º critério de comparação a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge

17 -

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$

• Termo geral da sucessão geradora $u_n = \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$

$\lim_n u_n = \lim_n \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} = \lim_n \left[\frac{1}{n^2} \operatorname{sen} n\right] = 0$ nada se pode concluir sobre a convergência da série

$u_1 = \operatorname{sen} 1 > 0$ • série de termos sem sinal fixo

$u_2 = \frac{\operatorname{sen} 2}{4} > 0$

$u_3 = \frac{\operatorname{sen} 3}{9} > 0$

$u_4 = \frac{\operatorname{sen} 4}{16} < 0$

$\vdots$

$\operatorname{sen} 7 > 0$

$\vdots$

• Série dos módulos: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2}$ é uma série de termos não negativos

$0 < |u_n| = \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2} = \frac{1}{n^2} \underbrace{|\operatorname{sen} n|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{n^2} = v_n$

Mas $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ esta é uma série de Riemann de expoente $r = 2$ logo converge

• Como $|u_n| \leq v_n$ pelo 1º critério de comparação a série $\sum u_n$ é absolutamente convergente

18- b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$

• Termo geral da sucessão geradora: $u_n = \frac{n^2}{2^n}$

• Apliquemos o critério da raiz

$$\lim_n \sqrt[n]{u_n} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_n \frac{n^{2/n}}{2} = \frac{1}{2} \lim_n \underbrace{\left(n^{1/n}\right)^2}_{\infty^0}$$

• Considere-se a função real de variável real

$f(x) = x^{1/x} \quad , x \in [1, +\infty[$

• O cálculo de $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$ conduz a uma indeterminação do tipo ∞^0. Ora

$$x^{1/x} = e^{\ln x^{1/x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$$

e $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\ln x\right] = \frac{\infty}{\infty} \underset{RLH}{=} \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1/x}{1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right] = 0$

Assim $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln x} = e^0 = 1$

e $\lim \left[n^{1/n}\right]^2 = 1$ pelo que $\lim_n \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2}\lim\left(n^{1/n}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1$

e pelo critério da razão a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$ é convergente

21- a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

• Termo geral da sucessão gerada

$u_n = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ não tem sinal fixo

• Estude-se $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ usando o critério da razão

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1-1}}{n+1}x^{n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n}\right| = \frac{n}{n+1}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \frac{n}{n+1}|x|$$

• Temos

$$\lim_{n} \frac{|u_{n+1}|}{u_n} = \lim_{n} \left[\frac{n}{n+1} |x| \right] = |x| \lim_{n} \frac{n}{n+1} = |x| = l$$

• Pelo critério da razão

- Se $|x| < 1 \iff -1 < x < 1$ a série converge
- Se $|x| > 1 \iff$ a série diverge
- Se $|x| = 1$ nada se pode concluir

• Logo, temos de estudar o que acontece para $x = 1$ e $x = -1$

• $x = 1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{x^n} = \sum_{n=1} \frac{1}{n}$ é um multiplo da série harmonica, logo é divergente

• $x = -1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{(+1)^n}{x^n} = \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n}$ série de termos alternados

critério da raiz

série convergente

Em resumo: a série de potencias

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{x} x^n \text{ (converge se } x \in]-1, 1]$$

Nota: raio de convergencia: $R = 1$

Intervalo de convergencia: $]-1, 1[$

23 -

a) Serie geométrica: $\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1} = \frac{1}{1-r}, |r| < 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 0 + 1 + x + x^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, |x| < 1$$

25-

• O objetivo é identificar a lei pela qual a função é normalmente identificada

a) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, x \in]-1,1[$

• Derivando termo a termo vem:

$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \dots$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0} (-x^2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-x^2)^{n-1}$

série geométrica de razão $r = x^2$

• Para $|r| = |-x^2| < 1$ a série converge e

$\sum_{x=1}^{+\infty} (-x^2)^{n-1} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$

Isto é

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f(x) = \int f'(x)\, dx$

$= \int \frac{1}{1+x^2}\, dx$

$= \operatorname{arctg} x + C, C \in \mathbb{R}$

Como $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \Rightarrow f(0) = 0$

$= f(x) = \operatorname{arctg} x + C \Rightarrow C = 0$

$\therefore f(x) = \operatorname{arctg} x, x \in]-1,1[$

1-

b) $\lim_{n \to +\infty} K = K \quad \forall K \in \mathbb{R}$ ~~sd~~ $u_n = K$

$\forall \delta > 0 \; \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |u_n - 0| < \delta$

c. aux

$|u_n - 0| < \delta \Leftrightarrow |K - 0| < \delta \Rightarrow K < \delta \rightarrow p$

seja $\delta > 0$ qualquer e tome-se $p > \delta$ $\quad p > \delta > K$

Então se $K < \delta < p$

$|u_n - 0| = K < \delta$

isto é $\lim K = K$

13-

c) cont.

- Usando o critério do integral

$$\int_1^{+\infty} f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{i+1}} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{i+1}} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b (i+1)^{\frac{1}{2}} = \lim_{b\to+\infty} \left. \frac{(i+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_1^b =$$

$$\int u' u^a = \frac{u^{a+1}}{a+1}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} 2(b+1)^{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{2} = +\infty \Rightarrow \text{Divergente}$$

12- e) $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\ln i}}$

$f'(x) = \left(\frac{1}{2^{\ln x}}\right)' = \frac{-2^{\ln x} \ln}{(2^{\ln x})^2}$

• Termo geral da sucessão geradora: $u_n = \frac{1}{2^{\ln n}} \rightsquigarrow f(x) = \frac{1}{2^{\ln x}}$

• $\lim_n u_n = \lim \frac{1}{2^{\ln n}} = 0$ logo nada se pode concluir

→ Apliquemos o critério do integral

Seja $f: [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{2^{\ln x}}$

• A função é:
- contínua: resulta de operações entre funções contínuas
- positiva: $2^{\ln x} > 0$
- decrescente: $f'(x) =$

• Além disso, $\forall n \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2^{\ln n}} = u_n$

•

Ora $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int \frac{1}{2^{\ln x}}\,dx$

13- e) $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{i+1}}$

$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{i+1}}\right)' =$
$= (i+1)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \times (i+1)^{-\frac{3}{2}}$

Termo geral a f.n. $u_n = \frac{1}{\sqrt{i+1}}$

$\lim_i \frac{1}{\sqrt{i+1}} = 0$ logo nada se pode concluir

• Seja $f: [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma série de termos não negativos.

f é: contínua (resulta de operações entre funções contínuas
positiva $f(x) > 0$, $\forall x \in D_f$
decrescente pois $f'(x) < 0$

✱ Cont

17 -

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

• Termo geral da sucessão geradora $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

$\lim\limits_{n} u_n = \lim\limits_{n} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 0$ logo nada se pode concluir

$u_1 = 1 > 0$

$u_2 = -\frac{1}{4} < 0$

$u_3 = \frac{1}{9} > 0$

$\vdots$

• Série dos módulos: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)^{n+1}|}{n^2}$ é uma série de termos não negativos

$0 < |u_n| = \dfrac{|(-1)^{n+1}|}{n^2} = \dfrac{1}{n^2} \underbrace{|(-1)^{n+1}|}_{=1} \leq \dfrac{1}{n^2} = v_n$

• $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ esta é uma série de Riemman de expoente $2 = 2$ logo converge (+)

• Como $|u_n| \leq v_n$ pelo 1º critério de comparação a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é absolutamente convergente

20 -

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n}}$

• Termo geral da sucessão geradora $= u_n = \sqrt[n]{\frac{3^n}{n}} = \frac{3}{n^{1/n}}$

• $\frac{3}{n^{1/n}}$ é uma série de Riemann com $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ logo

$\frac{1}{n} \leq 1$ então a série diverge.

20 -

b) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

• Termo geral da sucessão geradora: $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$\lim_n u_n = \lim_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$ logo, nada se pode concluir

$u_1 = -1 < 0$

$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$

$u_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$

⋮

• Série dos módulos: $\sum_{n \geq 1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ é uma série de termos positivos

$0 < |u_n| = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \underbrace{|-1|^n}_{=1} \leq \frac{1}{n} = v_n$

Mas, $\sum_{n \geq 1}^{+\infty} v_n = \sum_{n \geq 1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ esta é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 1/2$ logo diverge

• Como $|u_n| \leq v_n$ pelo 1º critério de comparação então $\sum u_n$ é simplesmente divergente