Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Cálculo para Engenharia

folha 6 — 2023'24

Séries numéricas.

1. Mostre, usando a definição, que

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} k = k, \quad \forall k \in \mathbb{R}$ (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{n+1}$ diverge.

2. Estude a monotonia, a limitação e a convergência das sucessões definidas por

(a) $a_n = \sqrt[n]{n}$

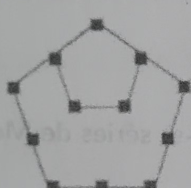
(b) $u_n = r^n$, com $r \in \mathbb{R}$

(c) $v_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

(d) (recursivamente) $w_1 = \sqrt{6}$ e, para $n \geq 1$,

$$w_{n+1} = \sqrt{6 + w_n},$$

3. Considere a sucessão (dita, segundo os Pitagóricos) dos números 'pentagonais' cujos primeiros termos são $1, 5, 12, 22, 35$.



(a) Qual o 6.º termo desta sucessão? E o 7.º? 92 é um número pentagonal? E qual é o 100.º termo da sucessão?

(b) Defina o termo geral da sucessão dos números pentagonais.

4. Escreva na forma $\sum\limits_{n=3}^{10} u_n$ e $\sum\limits_{k=0}^{7} u_{k+3}$ as seguintes somas:

(a) $\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{10}}$; $\sum\limits_{n=3}^{10} \frac{1}{2^n}$

(b) $\frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots - \frac{10}{11}$.

5. Considere a série definida por $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \cos(n\pi)$.

(a) Quais os primeiros quatro termos da série?

(b) Será possível definir-se o termo geral da série de outra forma? Qual?

6. Escreva na forma $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ as séries cujos primeiros termos são:

(a) $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$; $\sum\limits_{n\geq 1} (10)^{-(n-1)}$

(b) $\frac{3}{5} - \frac{4}{25} + \frac{5}{125} - \frac{6}{625} + \frac{7}{3125} \cdots$. $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{3}{5}\right)$

7. Escreva os primeiros quatro termos, da sucessão das somas parciais, para cada uma das seguintes séries. Encontre, se possível, o termo geral da sucessão das somas parciais.

(a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$

(b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$

(c) $2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{27} - \cdots$

(d) $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \frac{3}{2^{i+1}}$

8. Determine, se possível, a natureza das seguintes séries:

(a) $1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\text{2 termos}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{\text{4 termos}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots}_{\text{8 termos}}+\cdots$

(b) $1+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\text{2 termos}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}_{\text{4 termos}}+\underbrace{\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\cdots}_{\text{8 termos}}+\cdots$

9. Considere a soma $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{10^k}$, $n\in\mathbb{N}$, onde cada a_k é um número inteiro entre 0 e 9.

(a) Escreva a soma anterior, com $n=3$, na forma de uma fração decimal.

(b) Comente a afirmação "A convergência de séries geométricas de razão 1/10 permite atribuir um significado preciso a dízimas infinitas".

(c) Escreva as seguintes dízimas na forma de uma série e expresse a soma dessa série como quociente de dois números naturais:

i. 0.7(7) ii. 0.0666666... iii. 1.212(212) iv. 3.14159(14159)

10. Considere, para $r\in\mathbb{R}$, as séries definidas por $1+2r+r^2+2r^3+r^4+2r^5+r^6+\ldots$.

(a) Estude a natureza destas séries.

(b) Calcule a soma das séries, nos casos em que convergem.

11. As séries $\sum_{i=1}^{+\infty}a_n$ cujo termo geral se pode exprimir, $\forall n\in\mathbb{N}$, na forma $a_n=b_n-b_{n+1}$, dizem-se **séries de Mengoli** e são convergentes sse a sucessão b for convergente.

(a) Defina a sucessão das somas parciais, quando $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\arccos\left(\frac{1}{n+1}\right)-\arccos\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)$. Se convergir, determine a soma da série.

(b) Prove que a soma de uma série de Mengoli convergente é $S=b_1-\lim_{n\to+\infty}b_n$.

12. Usando o 'critério do Integral', analise a convergência das seguintes séries

(a) $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2+1}$ (b) $\sum_{n\geq1}n\,e^{-n^2}$? (c) $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{\ln i}}$ depois

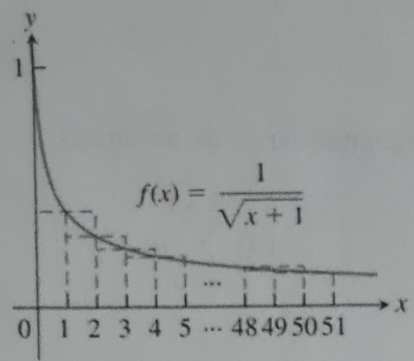
13. **Limitações para o resto, no critério do Integral** Se a função f permitir concluir, com recurso ao critério do Integral, que a série $\sum_{n\geq1}a_n$ converge, é possível estimar-se a dimensão do resto $\mathcal{R}_n$ –onde $\mathcal{R}_n=S-s_n$, S a soma da série e s_n o termo geral da sua sucessão das somas parciais– nomeadamente

$$\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\,dx\leq\mathcal{R}_n\leq\int_{n}^{+\infty}f(x)\,dx;$$

ou seja

$$s_n+\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\,dx\leq S\leq s_n+\int_{n}^{+\infty}f(x)\,dx.$$

Nestas condições, considere a série $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{i+1}}$.



(a) Use a figura para provar que

$$\int_1^{51} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx \le \sum_{n=1}^{50} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \le \int_0^{50} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx.$$

(b) Calcule ordem n, tal que $s_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i+1}}$ satisfaz $s_n > 1000$.

(c) Estude a natureza da série.

14. Esboce figuras, como a do exercício anterior, que ilustrem o seguinte resultado (relativo à série harmónica)

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n} \le 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\,dx = 1 + \ln n$$

15. Defina uma série numérica, sem termos nulos,

(a) cuja soma é $= 1$

(b) cuja soma é $= -3$

(c) cuja soma é $= 0$

(d) geométrica, que converge para 5 e cujo primeiro termo é $= 2$.

(e) geométrica, que converge para 5 e cujo primeiro termo é $= \frac{13}{2}$.

16. Usando critérios de comparação (i. é, uma série, conhecida, apropriada) estude a natureza das seguintes séries

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{5n-1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

17. Mostre que são absolutamente convergentes as seguintes séries

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$

18. Usando o critério de d'Alembert ou o de Cauchy ou o de Leibniz, estude a natureza das seguintes séries

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!\,n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{10n}{n^2+16}$

19. Determine a soma das seguintes séries.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-3)(2n-1)}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{(3n+1)(3n+2)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n\ge 0} e^{-n}$

20. Estude a natureza da série e, no caso de ser convergente e for apropriado, distinga entre convergência absoluta ou simples.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n\ge 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\ln i}{i^3}$

(e) $\displaystyle\sum_{n\ge 1} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n\ge 1} \frac{n+1}{n!}$

(g) $\displaystyle\sum_{n\ge 1} \frac{(-3)^n}{n!}$

(h) $\displaystyle\sum_{n\ge 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

(i) $1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 - \ldots$

21. Aplique o critério de d'Alembert (da razão) para determinar a natureza das seguintes séries de potências.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ (b) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ (c) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ (d) $\sum_{n=0}^{+\infty} n!\, x^n$

22. Identifique os valores de x para os quais a série (de potências) geométrica converge. Encontre a soma da série (como função de x), para esses valores de x.

(a) $\sum_{i=0}^{+\infty} 2^i x^i$ (b) $\sum_{n\geq 0}(-1)^n(x+1)^n$ (c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sen}^n x$ (d) $\sum_{n=0}^{+\infty} 3\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$

23. Determine o intervalo de convergência de cada uma das seguintes séries de potências. Represente, nesse intervalo, a soma da série como função real de variável real.

(a) $\sum_{i=0}^{+\infty} x^i$ (c) $\sum_{n\geq 0}\frac{(x-2)^n}{10^n}$ (e) $\sum_{n\geq 0}\frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(4x+1)^n$ (d) $\sum_{i=0}^{+\infty} 3^i x^i$ (f) $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-1\right)^n$

24. Defina, usando **derivação termo a termo**, as séries para as funções f' e f'', sabendo que a função f, real de variável real, é tal que $f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$, para $x\in\,]-1,1[$.

25. Identifique, usando **integração termo a termo**, a função f enquanto soma da seguinte série, isto é, tal que

?

(a) $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, para $x\in\,]-1,1[$[1]. (b) $f(x)=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$, para $x\in\,]-1,1[$.

26. **Séries de Taylor & de MacLaurin** Se f é uma função, real de variável real, com derivadas de qualquer ordem, em um intervalo do qual a é um ponto interior, define-se **Série de Taylor**[2], gerada por f em a, à série

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

(a) Encontre a série de Talor gerada pela função f, real de variável real e tal que $f(x)=\frac{1}{x}$, para $a=2$. Se essa série for convergente, determine a sua soma, bem como o intervalo de convergência.

(b) Defina as séries de MacLaurin para as funções exponencial e cosseno.

[1] Também é possível demonstrar-se que a série converge nas extremidades do intervalo. Tal demonstração não será, todavia, feita no âmbito da UC.

[2] Quando $a=0$ a série diz-se de MacLaurin.