Cálculo para Engenharia

Generalidades sobre o conjunto dos números reais

Maria Elfrida Ralha

Departamento de Matemática
(Universidade do Minho)

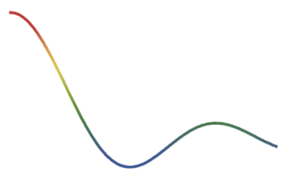
Licenciatura em Engenharia Informática

Índice

CÁLCULO: O que é?

- CÁLCULO é Matemática Elementar (Aritmética, Geometria, Álgebra) "enriquecida" com o conceito de *LIMITE*.
  Nesta UC, perceber-se-á como é que as FUNÇÕES (reais de uma variável real) são fundamentais para o estudo do Cálculo:
  - revendo alguns conceitos sobre estas funções (representando-as graficamente, combinando-as e classificando-as) e
  - aprendendo novos conceitos, que modelam matematicamente o mundo em que vivemos.

(Alguns) Exemplos

Matemática Elementar	Cálculo
 Declive de uma Reta	 Declive de uma Curva
Reta tangente a uma circunferência	Reta tangente a uma Curva
Área/Volume de um polígono/poliedro	Área/Volume de uma Região no plano/espaço
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ Soma de um Número Finito de números	$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ Soma de um Número Infinito de números
...	...

Número real é[i] o elemento de separação de duas classes, num corte qualquer feito no conjunto dos números racionais.

- Se esse elemento é um número racional, então o número real coincide com esse número e, neste caso, pode ser representado por uma dízima que é finita ou é infinita mas periódica.

EXEMPLO: O número $\frac{1}{3}$ é racional.

[i] Esta definição assenta no trabalho de R. Dedekind, em 1872.

Nota

Chamamos dízima finita a uma expressão da forma

$$a_0, a_1 a_2 \cdots a_n$$

onde $a_0 \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ e

$$a_1, a_2, \cdots, a_n \in \{0, 1, 2, ..., 9\};$$

sendo que

$$\begin{aligned} a_0, a_1 a_2 \cdots a_n &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \\ &= a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^{-1} + a_2 \times 10^{-2} + \cdots + a_n \times 10^{-n} \end{aligned}$$

- Se o elemento de separação não é racional, o número real diz-se **irracional**.

EXEMPLO: Os números $\sqrt{2}$, ϕ, e e π são irracionais. Note-se, em particular, que

$$\begin{array}{c} 1 < \sqrt{2} < 2 \\ \cdots \\ 1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \\ 1,4 < \sqrt{2} < 1,41 \\ \cdots \end{array}$$

O conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, reunido com o dos números irracionais formam o conjunto, $\mathbb{R}$, dos **Números Reais**.

Exemplo

- $\sqrt{2}$ é um número irracional porque
  Admitamos (por absurdo) que $\sqrt{2}$ é um número racional, isto é, supondo a e b números inteiros sem qualquer fator comum ter-se-á

$$\begin{array}{c} \sqrt{2} = \frac{a}{b} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow a^2 = 2b^2 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \ldots \end{array}$$

Isto significa que a^2 é par ...

Logo ....

Absurdo!

$\mathbb{R}$ é um corpo, ordenado e completo: AXIOMAS*

$\mathbb{R}$ é corpo:

munido de 2 operações –uma adição e uma multiplicação (as usuais)– tais que

1. A adição
   - é Associativa...
   - é Comutativa...
   - existe um elemento neutro para a adição –o zero–...
   - para cada número real, a, existe um elemento simétrico, denotado por $-a$...

$\mathbb{R}$ é um corpo,...

2. A multiplicação
   - é Associativa...
   - é Comutativa...
   - Existe um elemento "neutro" para a multiplicação –a unidade–...
   - Para cada número real, a diferente de zero, existe um elemento inverso, denotado $\frac{1}{a}$...

E ainda,

3. A multiplicação é distributiva em relação à adição...

* e lhe conferem a estrutura de CORPO.

$\mathbb{R}$ é ordenado

$\mathbb{R}$ é ordenado:
munido de uma relação de ordem, $<$, que verifica os seguintes Axiomas*:

- Transitividade: Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.
- Tricotomia: Ou $a < b$, ou $b < a$ ou $a = b$.
- Monotonia da adição:
  Se $a < b$, então $a + c < b + c$, $\forall c \in \mathbb{R}$.
- Monotonia(s) da Multiplicação:
  Se $a < b$ e $0 < c$, então $ac < bc$.
  Se $a < b$ e $c < 0$, então $bc < ac$.

$\mathbb{R}$ é ordenado...

Note-se que

Nota

- se, por absurdo, com $a < b$ se tivesse $-a < -b$ ter-se-ia

$$0 = a + (-a) < b + (-b) = 0.$$

- da "tricotomia", por exemplo, retiramos que

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$$

e representamos geometricamente $\mathbb{R}$ na forma uma reta orientada (eixo).

$\mathbb{R}$ é ordenado...

Nota

A relação de ordem $>$, oposta de $<$, é tal que $b > a$ define-se como significando o mesmo que $a < b$.
A relação lata $a \leq b$ é sinónima de $b \geq a$ e significa $a < b \quad \vee \quad a = b$.

Teorema

Sejam a, b, c e d números reais.

- Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$.
- Se a e b forem ambos positivos (ou ambos negativos) e $a < b$, então $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
- ...

$\mathbb{R}$ é completo

$\mathbb{R}$ é completo:
porque entre dois quaisquer números reais distintos há sempre uma infinidade de números racionais e uma infinidade de números irracionais.

Nota

$\therefore$ Não há um número real positivo que é o mais pequeno de todos.

Exemplos/Exercícios

- $\therefore$ O elemento 1 (unidade multiplicativa) é único.
- $\therefore (-1) \times 1 = -1.$
- $\therefore a \times 0 = 0, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$
- $\therefore (-1) \times (-1) = 1$ porque

$$\begin{aligned} 0 &= -1 \times 0 \\ &= (-1) \times (-1 + 1) \\ &= (-1) \times (-1) + (-1) \times 1 \\ &= (-1) \times (-1) + (-1) \end{aligned}$$

Logo ....

Definições e Propriedades dos Números Reais: Valor Absoluto

- O valor absoluto de qualquer número real a (é uma "norma") –interpreta-se geometricamente como a distância do número à origem (Zero)[ii]–e pode definir-se[iii] como

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

[ii] De modo análogo $|a - c|$, para qualquer número real c, interpreta-se geometricamente como a distância entre a e c.

[iii] Outras definições (equivalentes) poderiam ser

$$|a| := \text{máx}\{a, -a\}$$

ou

$$|a| := \sqrt{a^2}$$

.

Com $a, b \in \mathbb{R}$, o valor absoluto é tal que

- $|a| \geq 0$
- $|a| = 0 \quad$ sse $\quad a = 0$
- $|a \times b| = |a| \times |b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b| \quad$ (desigualdade triangular)

Teorema

Sejam x e a números reais quaisquer e ε um número real positivo.

- $|x - a| < \varepsilon \quad$ se e só se
$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$
- $|x - a| > \varepsilon \quad$ se e só se
$$x < a - \varepsilon \quad \text{ou} \quad x > a + \varepsilon.$$
- ...

Exemplos/Exercícios

- $\therefore -|a| \leq a \leq |a|$ porque
  - Se $a \geq 0$, então $|a| = a$ e

$$-a \leq a \leq a$$
$$-|a| \leq a \leq |a|$$

  - Se $a < 0$, então $|a| = -a$ e

$$a \leq a \leq -a$$
$$-|a| \leq a \leq |a|$$

Definições e Propriedades dos Números Reais: Intervalos

- Intervalo (aberto) de números reais a e b, sendo $a < b$, escreve-se $]a, b[$ e é

$$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

.

Há vários tipos de intervalos:

  - $]a, b]$ e $[a, b[$
  - $[a, b]$
  - $[a, +\infty[$ e $]a, +\infty[$
  - $]-\infty, b[$ e $]-\infty, b]$
  - $]-\infty, +\infty[$

Nota

a e b dizem-se extremidades do intervalo e os pontos do intervalo que não são extremidades dizem pontos interiores do intervalo.
O conjunto vazio também é um intervalo (pode escrever-se com diferentes tipos de extremidades).
É igualmente um intervalo qualquer conjunto unitário:

$$\{a\} = [a, a], \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Um conjunto $\mathcal{A}$, não vazio, de números reais é

- majorado[iv] (por M, dito "*majorante*") quando

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathcal{A}, \quad x \leq M$$

- minorado[v] (por m, dito "*minorante*") quando

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathcal{A}, \quad m \leq x$$

- limitado quando é, simultaneamente, majorado e minorado.

[iv] Em vez de majorado também podemos dizer que $\mathcal{A}$ é limitado superiormente. Quando existir o menor dos majorantes do conjunto chamamos-lhe supremo e se o supremo pertencer ao conjunto chama-se máximo.

[v] Ou limitado inferiormente. Se existir o maior dos minorantes do conjunto chamamos-lhe Ínfimo. E se o ínfimo pertencer ao conjunto, chama-se mínimo.

O conjunto $\mathcal{A} = \left\{\left|n^2 + sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right| : n \in \mathbb{N}_0\right\}$ não é limitado mas é minorado e tem mínimo.[vi]

- $\mathcal{A}$ é minorado: $\left|n^2 + sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right| \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$, pelo que qualquer número não positivo é minorante de $\mathcal{A}$. Além disso,

$$\inf\mathcal{A} = \min\mathcal{A} = 0.$$

- Por outro lado, $\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N}_0 : \left|n^2 + sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right| > M$, isto é, $\mathcal{A}$ não é majorado. Faça-se, por exemplo,

$$n = [\sqrt{M} + 1] + 2.$$

Como **Q**ueríamos **D**emonstrar

[vi] Um conjunto pode, naturalmente, não ter mínimo mas se houver mínimo, então ele é único (analogamente para a existência de máximo de um conjunto).