Cálculo Integral em $\mathbb{R}$

Cálculo para Engenharia

MARIA ELFRIDA RALHA

Departamento de Matemática
(Universidade do Minho)

Licenciatura em Engenharia Informática

Índice

- Para cada partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$, tem-se

$$L_f(\mathcal{P}) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U_f(\mathcal{P})$$

- [Aditividade]: Sejam f limitada em $[a, b]$ e $c \in]a, b[$.

  Então f é integrável em $[a, b]$ se e só se f for integrável separadamente em $[a, c]$ e $[c, b]$, tendo-se

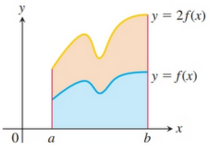
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

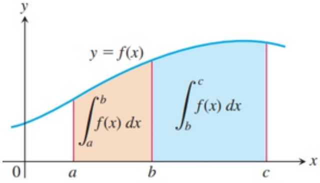
- Estabelece-se, no [intervalo de amplitude zero], que
  - $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0, \quad \text{para qualquer } a \in \mathbb{R}$

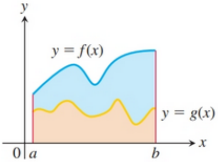
- Por convenção, estabelece-se ainda a [ordem de integração]
  - $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\,, \quad \text{para quaisquer } a, b \in \mathbb{R}$

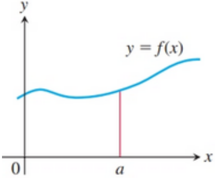
- $\displaystyle\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx,$ para qualquer $k \in \mathbb{R}$.
- $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx.$
- Se f tem um máximo M e um mínimo m, em $[a, b]$, então
$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M\,(b-a).$$
- [Monotonicidade]: Se f e g são integráveis em $[a, b]$ e $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, então
$$\int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx\,.$$
em particular, se $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$; então $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$.
- Se f é integrável em $[a, b]$, então a função $|f|$ é integrável em $[a, b]$ e
$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx\,.$$

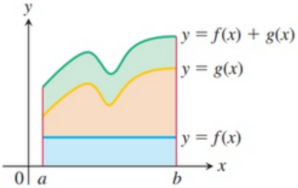
Exercício: Estabeleça a devida correspondência entre algumas das propriedades enunciadas e as interpretações geométricas:

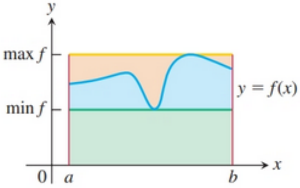












1. Se f é contínua em $[a, b]$ ou aqui tem, quando muito, um número finito de decontinuidades de salto, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{existe e} \quad f \quad \text{é integrável em} \quad [a, b].$$

1. Se f é contínua em $[a, b]$ ou aqui tem, quando muito, um número finito de decontinuidades de salto, então
$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{existe e} \quad f \quad \text{é integrável em} \quad [a, b].$$

2. Se f é limitada em $[a, b]$, anulando-se em todos os pontos de $[a, b]$ exceto, eventualmente, num número finito de pontos de $[a, b]$, então
$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

1. Se f é contínua em $[a, b]$ ou aqui tem, quando muito, um número finito de decontinuidades de salto, então
$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{existe e} \quad f \quad \text{é integrável em} \quad [a, b].$$

2. Se f é limitada em $[a, b]$, anulando-se em todos os pontos de $[a, b]$ exceto, eventualmente, num número finito de pontos de $[a, b]$, então
$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

3. Se f é integrável em $[a, b]$ e g é uma função que difere de f apenas num número finito de pontos $[a, b]$, então
$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exercícios: Prove, por definição de integral de Riemann, que

1. A função de Dirichlet não é integrável em intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ algum.
2. Se $\forall x \in [a, b], \quad f(x) = \alpha$; então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \alpha(b-a)$$

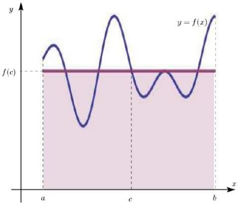
3. Se $\forall x \in [0, b], \quad f(x) = x$; então

$$\int_0^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}(b^2)$$

Observação: O cálculo de $\int_a^b f(x)\,dx$ por definição ou a partir da desigualdade $L_f(\mathcal{P}) \leq I \leq U_f(\mathcal{P})$ é, geralmente, trabalhosa/complicada.

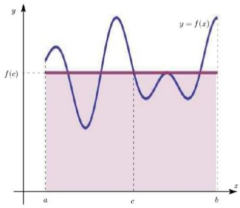
O **valor médio** de f em $[a, b]$ é

$$vm(f) := \frac{\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx}{b-a}$$

- 

O **valor médio** de f em $[a, b]$ é

$$vm(f) := \frac{\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx}{b-a}$$

- 

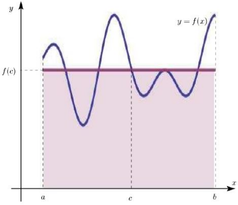
- **Exercício** Calcule-se o valor médio da função, real de variável real, definida no intervalo $[-2, 2]$ por

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}.$$

Seja f integrável em $[a, b]$.

O **valor médio** de f em $[a, b]$ é

$$vm(f) := \frac{\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx}{b-a}$$

- 

- **Exercício** Calcule-se o valor médio da função, real de variável real, definida no intervalo $[-2, 2]$ por

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}.$$

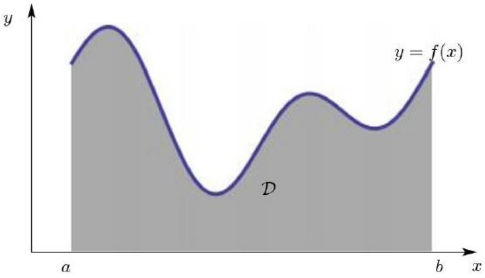
Nota

Observação: O ponto c não é necessariamente o ponto médio do intrevalo $[a, b]$, nem é necessariamente único. A $f(c)$ chamamos valor médio da função f, em $[a, b]$.

PROBLEMA[i]: sobre a noção intuitiva de área de uma região plana

Sendo $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, neste caso com $f(x) > 0, \quad \forall x \in [a, b]$,

Que número representa a área de $\mathcal{D}$?



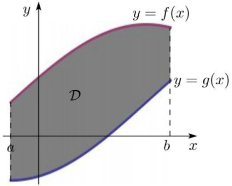
($\mathcal{D}$ é a região do plano delimitada superiormente pelo gráfico da função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, inferiormente pelo eixo das abcissas e lateralmente pelas retas verticais definidas por $x = a$ e $x = b$).

[i] Um outro problema clássico, na interpretação geométrica do integral definido, é o de visualizar/ler **a distância percorrida por um móvel, em um gráfico de velocidades**.

Em geral,

- Se f e g são contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo o $x \in [a, b]$ então a área da região limitada pelos gráfico de f e g entre a e b é

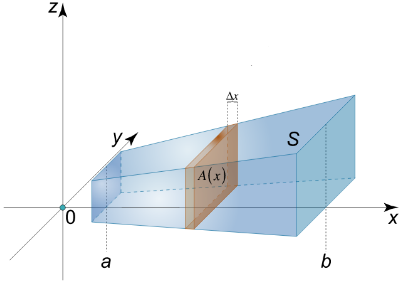
$$\text{área} = \int_{x=a}^{b} [\, f(x) - g(x)\,]\, dx.$$



Exercício:: Calcular a área da figura delimitada pelo gráfico da função f, real de variável real, definida em $[-1, 2]$ por $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ e o eixo das abcissas.

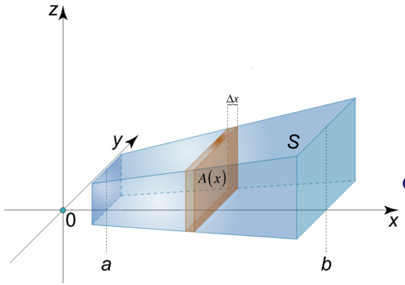
O volume de $\mathcal{S}$, com secções planas de área integrável é em $[a, b]$ é

$$V(\mathcal{S}) := \int_{x=a}^{b} A(x)\, dx$$



O **volume** de $\mathcal{S}$, com secções planas de área integrável é em $[a, b]$ é

$$V(\mathcal{S}) := \int_{x=a}^{b} A(x)\, dx$$

- 

- **Exercício1** Calcule-se o volume de uma pirâmide de base quadrada (de lado 3) e altura 6.

- **Exercício2– Sólidos de Revolução** Calcule-se o volume de uma esfera gerada pela rotação da circunferência definida por $x^2 + y^2 = R^2$, em torno do eixo das abcissas.

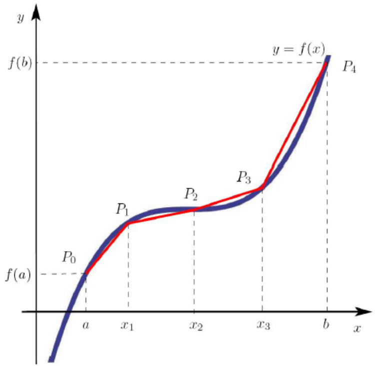
Sejam

- f de classe $\mathcal{C}^1$ em $[a, b]$;
- $\mathcal{P}$ uma partição de $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b;$$

- P_k o ponto de coordenadas

$$(x_k, f(x_k)).$$



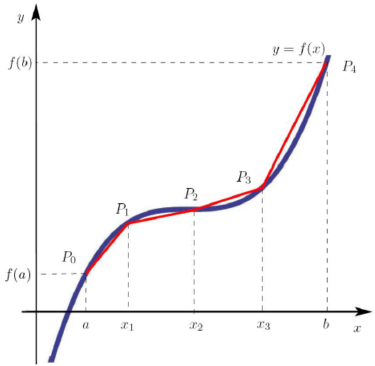
Sejam

- f de classe $\mathcal{C}^1$ em $[a, b]$;
- $\mathcal{P}$ uma partição de $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b;$$

- P_k o ponto de coordenadas

$$(x_k, f(x_k)).$$



- A medida do comprimento da linha poligonal definida pelos pontos P_k é a soma da medida dos comprimentos dos segmentos de reta $\overline{P_k P_{k+1}}$, isto é

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{P_k P_{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[x_{k+1} - x_k]^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}.$$

- Pelo teorema do valor médio de Lagrange, existe $\widetilde{x_k} \in]x_k, x_{k+1}[$ tal que
$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\widetilde{x_k})(x_{k+1} - x_k)$$
pelo que
$$\begin{aligned}[x_{k+1} - x_k]^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2 &= [x_{k+1} - x_k]^2 + [f'(\widetilde{x_k})(x_{k+1} - x_k)]^2 \\ &= (x_{k+1} - x_k)^2 \, (1 + [f'(\widetilde{x_k})]^2).\end{aligned}$$

- Pelo teorema do valor médio de Lagrange, existe $\widetilde{x_k} \in]x_k, x_{k+1}[$ tal que
$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\widetilde{x_k})(x_{k+1} - x_k)$$
pelo que
$$\begin{aligned}[x_{k+1} - x_k]^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2 &= [x_{k+1} - x_k]^2 + [f'(\widetilde{x_k})(x_{k+1} - x_k)]^2 \\ &= (x_{k+1} - x_k)^2 \left(1 + [f'(\widetilde{x_k})]^2\right).\end{aligned}$$

- Assim,
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \overline{P_k P_{k+1}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2(1 + [f'(\widetilde{x_k})]^2)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\widetilde{x_k})]^2}\ (x_{k+1} - x_k)\end{aligned}$$

- Mas
$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+(f'(\widetilde{x_k}))^2}\,(x_{k+1}-x_k)$$
é a soma de Riemann para a função
$$g(x)=\sqrt{1+[f'(x)]^2}.$$

- Mas
$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(\widetilde{x_k}))^2}\,(x_{k+1} - x_k)$$
é a soma de Riemann para a função
$$g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

- A função $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ é contínua logo integrável.

- Mas
$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(\widetilde{x_k}))^2}\,(x_{k+1} - x_k)$$
é a soma de Riemann para a função
$$g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

- A função $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ é contínua logo integrável.

- Fazendo $n \to \infty$, a medida do comprimento da linha poligonal (soma de Riemann) tende para a medida do comprimento da curva (integral).

- [Comprimento de uma curva]

Seja f de classe $\mathcal{C}^1$ em $[a, b]$. A medida do comprimento L da curva definida pelo gráfico de f do ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(b, f(b))$ é dado por

$$L = \int_{x=a}^{b} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

- Calcular a medida do comprimento do gráfico da função

$$f(x) = (x-1)^{3/2} \qquad \text{quando} \quad x \in [1,2]$$

- Calcular a medida do comprimento do gráfico da função

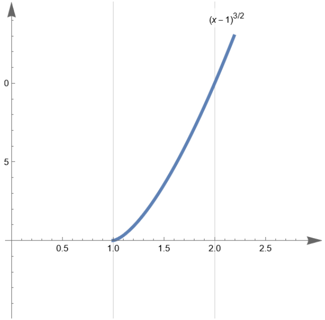
$$f(x) = (x-1)^{3/2} \qquad \text{quando} \quad x \in [1,2]$$

Tem-se

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x-1}.$$

Com $x - 1 > 0$ para $x \in [1,2]$ vem

$$\begin{aligned} \sqrt{1+[f'(x)]^2} &= \sqrt{1+\left[\frac{3}{2}\sqrt{x-1}\right]^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{9x-5} \end{aligned}$$



Assim,

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, d = \int_1^2 \frac{1}{2}\sqrt{9x-5}\, dx = \frac{1}{18}\,\frac{2}{3}(9x-5)^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{13\sqrt{13}-8}{27} \approx 1.4397.$$

Exemplos

- Calcular a medida do comprimento do gráfico da função

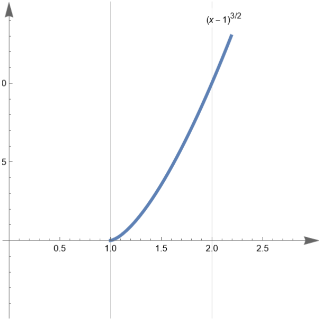
$$f(x) = (x-1)^{3/2} \qquad \text{quando} \quad x \in [1,2]$$

Tem-se

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x-1}.$$

Com $x - 1 > 0$ para $x \in [1,2]$ vem

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{1+\left[\frac{3}{2}\sqrt{x-1}\right]^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9x-5}$$



Assim,

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, d = \int_1^2 \frac{1}{2}\sqrt{9x-5}\, dx = \frac{1}{18}\,\frac{2}{3}(9x-5)^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{13\sqrt{13}-8}{27} \approx 1.4397.$$

- Qual o comprimento de uma circunferência de raio r?

- Exercício: Calcule $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} \right)$

- Exercício: Calcule $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} \right)$

- Exercício: Qual a distância percorrida por um objeto em movimento, com uma "função" velocidade conhecida e durante um dado intervalo de tempo?

- Exercício: Calcule $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} \right)$

- Exercício: Qual a distância percorrida por um objeto em movimento, com uma "função" velocidade conhecida e durante um dado intervalo de tempo?

- Exercício: Sejam C o custo diário de aquecimento de uma residência e t o tempo (contado em dias a partir de 1 de janeiro de 2017). Como interpretar

$$\int_{t=0}^{90} C(t)\,dt \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{90}\int_{t=0}^{90} C(t)\,dt \quad ?$$