Séries Numéricas

Cálculo para Engenharia

Maria Elfrida Ralha

Departamento de Matemática
(Universidade do Minho)

Licenciatura em Engenharia Informática

- $0,3333333\ldots$ é uma expansão decimal que representa $\dfrac{1}{3}$; isto é,

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \cdots$$

- $\ln 2$?

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

- $\dfrac{\pi}{4}$?

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

- Mas também $[\operatorname{sen} x]$?

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Nota

A soma de um número infinito de números, pode ser finita!
Mas nem todas as somas com um número infinito de parcelas, são finitas... Por exemplo:

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots \qquad \textit{ou} \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

É Importante saber 'somar' um número infinito de parcelas!

Índice

- [Sucessão de números reais] Uma sucessão de números reais é uma função real de variável natural, isto é, definida de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$.

  Escreve-se:

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \rightsquigarrow & u(n) = u_n \end{array}$$

  onde

  - A imagem de $n \in \mathbb{N}$, por u, se representa, habitualmente, por u_n e designa-se termo de ordem n ou termo geral da sucessão.

Nota

- *Os números reais $u_1, u_2, u_3, \ldots$ designam-se, respetivamente, primeiro termo da sucessão, segundo termo, terceiro termo, etc.*
- *As sucessões podem representar-se geometricamente, como pontos na reta real ou como pontos, num referencial cartesiano, onde no eixo das abcissas se indica a ordem do termo (n) e no eixo vertical se indica a sua imagem, a_n.*

1. [Progressão aritmética] Uma progressão aritmética de razão r e primeiro termo a (com $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $a \in \mathbb{R}$) é a sucessão de números reais definida por
$$u_n = a + (n-1)r, \quad \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}$$
O primeiro termo é $u_1 = a$, o segundo é $u_2 = a + r$, o terceiro é $u_3 = a + 2r$, $\cdots$; ou seja, é constante –e igual à razão r–
a diferença entre cada termo e o que o precede.

2. [Progressão geométrica] Uma progressão geométrica de razão r e primeiro termo a (com $r \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$) é a sucessão de números reais definida por
$$u_n = a\, r^{n-1}, \quad \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}$$
O primeiro termo é $u_1 = a$, o segundo é $u_2 = a\, r$, o terceiro é $u_3 = a\, r^2$, $\cdots$; ou seja, é constante –e igual à razão r–
o quociente entre cada termo e o que o precede.

1. Qual a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética?

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{n}{2}\left(u_1 + u_n\right)$$

2. Qual a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica?

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \begin{cases} u_1 . \dfrac{1 - r^n}{1 - r} & \text{se } r \neq 1 \\ n . u_1 & \text{se } r = 1 \end{cases}$$

Seja u uma sucessão de números reais

- [Sucessão monótona] Diz-se que u é
  - crescente quando é positiva a diferença entre qualquer termo e o que o precede, isto é,

    $$u_{n+1} \geq u_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

  - decrescente quando é negativa a diferença entre qualquer termo e o que o precede, isto é,

    $$u_{n+1} \leq u_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

  - monótona se for decrescente ou crescente
- [Sucessão limitada] Diz-se que u é limitada quando existir um número real positivo M tal que

$$|u_n| \leq M, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. A sucessão definida por $u_n = 2n$ é crescente e não é limitada.

2. A sucessão definida por $u_n = \dfrac{1}{n}$ é decrescente e é limitada.

3. A sucessão definida por $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$ é crescente e é limitada.

4. A sucessão definida por $u_n = (-1)^n$ não é monótona e é limitada.

- [Limite de uma sucessão] Diz-se que o limite da sucessão de números reais u é o número real ℓ

  e escreve-se

  $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \qquad \lim_n u_n = \ell \quad \text{ou} \qquad u_n \longrightarrow \ell$$

  quando (por definição)

  $$\forall \delta > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| < \delta$$

  - Neste caso, diz-se que a sucessão u é uma sucessão convergente.

  - Uma sucessão que não é convergente diz-se divergente.

- [Propriedades das sucessões convergentes]

1. O limite de uma sucessão, quando existe, é único.

2. Qualquer sucessão constante é convergente: tem por limite a própria constante, isto é
$$\lim_n k = k, \qquad \forall k \in \mathbb{R}$$

3. Qualquer a sucessão monótona e limitada é convergente.

4. É válida a "aritmética" de limites.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)+\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\cdot v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$
3. se $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)\neq 0$ e $v_n\neq 0, \forall n\in\mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)}{\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)}$
4. se f é uma função, real de variável real, contínua em $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$, então $\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)=f\left(\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)\right)$
5. se $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$, então $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=\ell$
6. se , para qualquer $n>n_0$, $u_n\leq v_n\leq w_n$ e $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\ell$, então $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ell$

1. A sucessão definida por $u_n = 2n$ é divergente.

2. A sucessão definida por $u_n = \dfrac{1}{n}$ (monótona e limitada) é convergente. $\lim\limits_{n} u_n = 0$.

3. A sucessão definida por $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$ é convergente, para 2.

4. A sucessão definida por $u_n = (-1)^n$ é divergente.

5. A sucessão definida por $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$ é convergente, para zero.

Teorema (Alguns Limites de Sucessões)

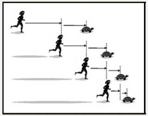
1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0.$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1, \qquad x > 0.$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n} = 0, \qquad |x| < 1.$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{n} = e^{x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{n}}{n!} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$

- Uma sucessão diz-se definida recursivamente, quando são conhecidos
- o primeiro, ou primeiros, termos &
- uma 'lei', dita **fórmula recursiva**, que permite calcular um termo posterior, à custa dos que o precedem

Exemplos:: Considere a sucessão definida recursivamente por

1. $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + 1, \forall n > 1$.
2. $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ e $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \forall n \geq 3$ (dita sucessão de **Fibonacci**).

Índice



Paradoxo de Aquiles e da tartaruga

Aquiles, o herói mais veloz da mitologia grega, entra numa corrida contra uma lenta tartaruga.

Uma vez que a velocidade de Aquiles é assumidamente superior à da tartaruga, esta recebe uma vantagem, começando a corrida dez metros à sua frente.

Em pouco tempo Aquiles atinge a marca dos $10m$*, mas neste intervalo de tempo a tartaruga já caminhou* $1m$*. Em seguida, Aquiles percorre esse metro adicional, mas a tartaruga já lá não está, pois percorreu mais* $1/10$ *de metro.*

Quando Aquiles cobre este $1/10$ *de metro adicional, a tartaruga está* $1/100$ *de metro à frente. E depois,* $1/1000$ *à frente, e depois* $1/10.000$*, etc., etc..*

- Aquiles teria pela frente uma missão IMPOSSÍVEL porque teria que percorrer um número INFINITO de espaços, num período de tempo finito.
- O argumento de que Aquiles é mais veloz do que a tartaruga só serve para a justificação de que os espaços que o separam da tartaruga são, cada vez, mais pequenos.
  - Qual o espaço percorrido pela tartaruga?

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n-1}}$$

  - Qual o espaço percorrido por Aquiles?

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^n} + \cdots = 10 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n-1}}$$

- Apesar de sabermos adicionar 2 números, 3 números, um bilião de números ou qualquer número <u>finito</u> de números, tal conhecimento NÃO nos permite adicionar um número <u>infinito</u> de números...

Como temos um número INFINITO de termos, não podemos simplesmente ir somando 1 termo à espera de perceber qual o resultado...

Mas podemos procurar um 'padrão' nessas somas parciais. Por exemplo, o espaço percorrido pela 'tartaruga' teria sido:

Somas Parciais		Valor	**Padrão**
Primeira	$s_1 = 1$	1	...
Segunda	$s_2 = 1 + \frac{1}{10}$	$\frac{11}{10} = 1,1$	...
Terceira	$s_3 = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100}$	$\frac{111}{100} = 1,11$	...
...	...	...	...
n-ésima	$s_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{1}{10^n}$	$1,\ \underset{(n-1)1s}{11\ldots1}$	$\frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

- A partir de uma sucessão u de números reais, forme-se uma outra sucessão s –dita das somas parciais– do seguinte modo:

$$s_1 = u_1 = \sum_{k=1}^{1} u_k$$

$$s_2 = u_1 + u_2 = \sum_{k=1}^{2} u_k$$

$$\vdots$$

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

$$\vdots$$

- O termo geral da sucessão s, das somas parciais, é

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

- [Série numérica convergente] A série numérica $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ diz-se convergente quando a respetiva sucessão das somas parciais for convergente, isto é, for tal que

$$\exists S \in \mathbb{R} \; : \; S = \lim_{n} s_n$$

  - Escreve-se, então

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

    e diz-se que S é a soma da série.
  - Se a série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ não é convergente, diz-se que ela é divergente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \ \underline{\text{define-se como}} \ \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

1. Não se confunde uma série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ com o termo geral da sucessão das somas parciais $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$; tão pouco se confunde a sucessão u com a sucessão s (das respetivas somas parciais).

2. A sucessão u diz-se a sucessão geradora da série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

3. [Notações] A série de números reais representa-se por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n\geq 1} u_n, \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n, \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n} u_n.$$

4. Há também séries cuja sucessão geradora tem domínio $\mathbb{N}_0$ ou tem domínio $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, sendo $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Nestes casos escrever-se-à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n\geq 0} u_n \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n\geq n_0} u_n.$$

1. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n-1}}$, descrita no paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, é convergente.

   - O termo geral da sucessão geradora é $u_n = \dfrac{1}{10^{n-1}}$
   - O termo geral da sucessão das somas parciais é

$$s_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k-1}}$$

   - Tem-se

soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.

$$s_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} = 1.\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \longrightarrow \frac{10}{9}$$

   - Logo a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n-1}}$ converge e a sua soma é $\dfrac{10}{9}$

- O espaço percorrido pela tartaruga é

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{10^{n-1}}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{10^{n-1}}=\frac{10}{9}$$

e o espaço percorrido por Aquiles é

$$10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{10^{n}}+\cdots=10+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{10^{n-1}}=10+\frac{10}{9}=\frac{100}{9}$$

  - Logo, Aquiles vence a tartaruga.

- Relativamente à série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$:
  - termo geral da sucessão geradora $u_n = \dfrac{1}{n}$
  - sucessão das somas parciais

$$s_1 = u_1 = 1;$$
$$s_2 = u_1 + u_2 = 1 + \frac{1}{2};$$
$$\ldots$$
$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

  - Neste caso (como de resto na maioria dos casos com que somos confrontados), não nos é fácil estudar a convergência da série a partir da definição, isto é, recorrendo à sucessão das suas somas parciais.

  Conjecture: E se esta série descrevesse a corrida entre Aquiles e a tartaruga?

- Exprima a dízima (infinita, mas periódica) $5,232323\ldots$, na forma de uma razão entre dois números naturais.

- [Condição necessária de convergência] Se a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente então
$$\lim_n u_n = 0.$$

  - **[Condição suficiente de divergência]** Se a sucessão u não tem limite ou se $\lim_n u_n = \ell$, com $\ell \neq 0$, então a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

- Se $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, então $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Se $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, então $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.
- Se $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, o teste é inconclusivo; isto é, a série poderá convergir ou não (impõe-se uma outra análise da série).

Exemplo

Estudar a natureza da série $\sum_{n\geq 1} n$.

- O termo geral da sucessão geradora é $u_n = n \to +\infty$

  OU

- Tratando-se de uma progressão aritmética, sabemos que termo geral da sucessão das somas parciais é

$$s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = (1+n)\frac{n}{2} \to +\infty$$

  OU

- Tem-se ainda que

$$s_n \geq \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ parcelas}} = n \times 1 = n \longrightarrow +\infty$$

Logo **a série** $\sum_{n\geq 1} n$ **é divergente**.

Observação: Isto significa, por exemplo, que se Aquiles tivesse que percorrer estes espaços –cada vez maiores– jamais teria alcançado a tartaruga.

1. A série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+1}$ é divergente.

   Basta notar que
   $$\lim_n \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$$

2. A série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente no entanto $\displaystyle\lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

[Propriedade 1] Se $\sum_{n\geq 1} u_n$ tem por soma S e $\sum_{n\geq 1} v_n$ tem por soma T então

- $\sum_{n\geq 1}(u_n + v_n)$ converge e tem por soma $S + T$;
- $\sum_{n\geq 1} \alpha\, u_n$ converge e tem por soma $\alpha\, S$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

[Propriedade 2] Se a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge então, dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a série $\sum_{n\geq 1} \alpha\, u_n$ também diverge.

[Propriedade 3] Se a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge e a série $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge então a série $\sum_{n\geq 1}(u_n + v_n)$ diverge.

[Propriedade 4] Se as sucessões u e v diferem, quando muito, num número finito de termos então têm a mesma natureza.

Isto é, [Propriedade 4'] A natureza de uma série (convergência vs. divergência) não se altera quando se adiciona e/ou se subtrai um número finito de termos.

Exemplo

1. Averiguar a natureza da série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{6^{n-1}}\,.$$

- Note-se que

$$\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{6^{n-1}} = \frac{3^{n-1}}{6^{n-1}} - \frac{2^{n-1}}{6^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Observação

1. Se as séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ forem divergentes nada se pode concluir quanto à convergência da série
$$\sum_{n\geq 1}(u_n+v_n).$$

   - As séries
   $$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} \quad \text{e} \sum_{n\geq 1}\frac{-1}{n+1} \quad \text{divergem} \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \text{converge.}$$

   - As séries
   $$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} \quad \text{e} \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+2} \quad \text{divergem} \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right) \text{diverge.}$$

Índice

Série geométrica

- Chama-se série geométrica de razão r a uma série cuja forma geral é

$$\sum_{n\geq 1} r^{n-1}, \qquad r\in\mathbb{R}.$$

  - A sucessão geradora, u, é definida por $u_n = r^{n-1}$;
  - A sucessão das somas parciais, s , é definida por

$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} = \begin{cases} n, & \text{se} \quad r = 1; \\ \dfrac{1-r^n}{1-r}, & \text{se} \quad r \neq 1. \end{cases}$$

- Sendo

$$s_n = \begin{cases} n, & \text{se} \quad r = 1; \\ \dfrac{1 - r^n}{1 - r}, & \text{se} \quad r \neq 1. \end{cases}$$

  - Se $r = 1$ a série diverge.

    De facto $u_n = 1$ e $\lim_{n\to\infty} u_n = 1 \neq 0$.

  - Se $r = -1$ a série diverge.

    De facto $u_n = (-1)^{n-1}$ e $\lim_{n\to\infty} u_n$ não existe.

  - Se $r > 1$ a série diverge.

    Temos $u_n = r^{n-1}$ e $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} r^{n-1} \to +\infty \neq 0$.

  - Se $r < -1$ a série diverge.

    Temos $u_n = r^{n-1}$ e não existe $\lim_{n\to\infty} u_n$.

  - Se $-1 < r < 1$ a série converge e tem por soma $\dfrac{1}{1-r}$.

- [Série geométrica I] A série geométrica de razão r definida por

$$\sum_{n\geq 1} r^{n-1}, \qquad r \in \mathbb{R}$$

é convergente se e só se $|r| < 1$. Neste caso, a sua soma é

$$S = \frac{1}{1-r}.$$

- [Série geométrica II] A série geométrica de primeiro termo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e razão r definida por

$$\sum_{n\geq 1} a\, r^{n-1}, \qquad r \in \mathbb{R}$$

é convergente se e só se $|r| < 1$. Neste caso, a sua soma é

$$S = \frac{a}{1-r}.$$

A convergência de séries numéricas explica muitos dos fenómenos que observamos no mundo (e não só o caso de que Aquiles, sendo um corredor mais veloz, ultrapassa a tartaruga). Qualquer distância, tempo ou força se pode decompôr em um úmero infinito de porções que, em certos casos, podemos abordar como finitos mas cujo entendimento não pára de nos surpreender...

- Chama-se série harmónica à série definida por

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

e da qual falámos em um dos exemplos anteriores.
Pois bem: não se trata, somente, de "ir percorrendo espaços cada vez mais pequenos". Na verdade,

  - **a série harmónica é divergente**.

- Chama-se série de Riemann de expoente r a uma série definida por[i]

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^r}, \qquad r > 0.$$

  - A sucessão geradora, u , é definida por $u_n = \dfrac{1}{n^r}, \ \forall n \in \mathbb{N}$
  - A sucessão das somas parciais é definida por

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots + \frac{1}{n^r}$$

  - Provaremos (recorrendo a integrais impróprios) que a série de Riemann é convergente se e só se $r > 1$.

[i] Registe-se, em particular, que a série harmónica é o caso particular de uma série de Riemann (quando $r = 1$).