Séries Numéricas

Cálculo para Engenharia

Maria Elfrida Ralha

Departamento de Matemática
(Universidade do Minho)

Licenciatura em Engenharia Informática

Índice

- Uma série de termos não negativos é uma série cuja forma geral se expressa na forma

$$\sum_{n\geq 1} u_n, \qquad \text{onde} \quad u_n \geq 0 \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Neste caso, tem-se que:

  - o termo geral da série é, naturalmente, u_n;
  - a sucessão das somas parciais é monótona crescente pois

$$s_n = s_{n-1} + u_n \geq s_{n-1}$$

Teorema

Uma série de termos não negativos é convergente **se e só se** *a correspondente sucessão das somas parciais for majorada (limitada superiormente).*

Considere-se a **série harmónica**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Obs:: Embora o termo geral tenda para zero, a série harmónica é divergente!

- [Análise da convergência]
  - Basta constatar que

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)}_{>\frac{8}{16}=\frac{1}{2}}+\cdots$$

Ou seja,

- A sucessão das somas parciais não é majorada!

Por conseguinte, **a série harmónica diverge**.

[Critério do integral]

Seja $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva, decrescente e, para cada $n \in \mathbb{N}$ seja, $f(n) = u_n$. Então

$$\sum_{n \geq 1} u_n \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} f(x)\, dx$$

têm a mesma natureza (i. é, são ambos convergentes ou ambos divergentes).

Nota

Note-se que no caso de serem ambos convergentes, não se estabelece qualquer relação entre a soma da série e o valor do integral impróprio.

Considerem-se as **séries de Riemann**, definidas por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^r} = 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots + \frac{1}{n^r} + \cdots$$

Obs:: entre as quais, para $r = 1$, está a série harmónica!

- [Análise da convergência]
  - Comparam-se, as séries de Riemann, com o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\, dx.$$

2. A série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^r}$ converge quando e só quando $r > 1$.

   - Seja $f(x) = \frac{1}{x^r}$. Esta função
     - tem domínio $[1, +\infty[$
     - é contínua, positiva e decrescente
     - $f(n) = \frac{1}{n^r}$
   - Então

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^r} \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\, dx$$

     têm a mesma natureza.

   - O integral impróprio diverge quando $r \leq 1$ e converge quando $r > 1$ (confira-se!), logo a série de Riemann também diverge quando $r \leq 1$ e converge quando $r > 1$.

Exemplo

A série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge?

Considere-se a função f, definida no intervalo $[1, +\infty[$, por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Obs:: f é contínua, positiva, decrescente e, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $f(n) = u_n$.

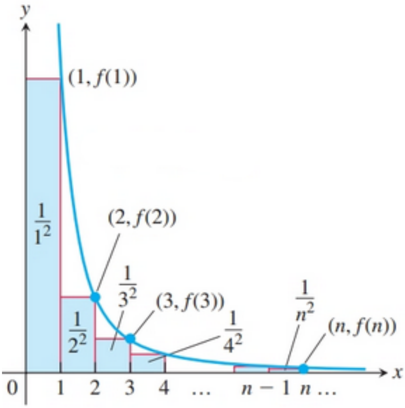
Comparemos $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ com $\displaystyle\int_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.

- Note-se que

$$
\begin{aligned}
s_n &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \\
&< f(1) + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx
\end{aligned}
$$

- Uma vez que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \ldots = 2$,

  então a série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.



[1.º critério de comparação]

Sejam $\sum_{n\geq1} u_n$ e $\sum_{n\geq1} v_n$ duas séries de termos não negativos tais que, a partir de certa ordem, $(0 \leq)\, u_n \leq v_n$.

(a) Se $\sum_{n\geq1} v_n$ é convergente então $\sum_{n\geq1} u_n$ também converge.

(b) Se $\sum_{n\geq1} u_n$ é divergente então $\sum_{n\geq1} v_n$ também diverge.

Nota

As séries geométricas e as de Riemann, são séries particularmente úteis enquanto séries comparativas de referência.

Exercício

1. Mostre que série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^{n+1}n}$ é convergente.

[2.º critério de comparação]

Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ séries de termos positivos tais que $\ell = \lim_n \frac{u_n}{v_n}$, onde $\ell \in [0, +\infty[$.

(a) $\ell \neq 0$ e $\ell \neq +\infty \implies \sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ têm a mesma natureza.

(b) $\ell = 0$

- $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge $\implies \sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
- $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge $\implies \sum_{n\geq 1} v_n$ diverge.

(c) $\ell = +\infty$

- $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge $\implies \sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.
- $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge $\implies \sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

1. Mostre que série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}$ é divergente.

2. Mostre que série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{n}\right)$ é divergente.

[Critério da razão (ou de D'Alembert)]

Seja u uma sucessão de termos positivos e suponha-se que

$$\ell = \lim_{n} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

(a) Se $\ell < 1$, então $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

(b) Se $\ell > 1$, então $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

(c) Se $\ell = 1$, então nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

Exercício

1. Estude a natureza da série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

[Critério da raiz (ou de Cauchy)]

Seja u uma sucessão de termos não negativos e suponha-se que

$$\ell = \lim_n \sqrt[n]{u_n}.$$

(a) Se $\ell < 1$, então $\sum_{n \geq 1} u_n$ é convergente.

(b) Se $\ell > 1$, então $\sum_{n \geq 1} u_n$ é divergente.

(c) Se $\ell = 1$, então nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Exercício

1. Estude a natureza da série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n^2}{n^3+3n}\right)^n$.

Índice

- Uma série de termos com sinal arbitrário é uma série cujos termos não têm sinal fixo. Seja

$$\sum_{n\geq 1} u_n$$

  - À série

$$\sum_{n\geq 1} |u_n|$$

  chama-se série dos módulos associada à série dada.

Teorema

Se a série $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ *é convergente, então a série* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *também é convergente.*

- Se $\sum_{n\geq 1} |u_n|$
    - converge, diz-se que $\sum_{n\geq 1} u_n$ é absolutamente convergente;
    - diverge mas $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, diz-se que $\sum_{n\geq 1} u_n$ é simplesmente convergente.

Nota

Para averiguar se a série de termos com sinal arbitrário, $\sum_{n\geq 1} u_n$*, é absolutamente convergente, empregam-se na série* $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ *os critérios definidos para as séries de termos não negativos.*

1. $$\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{sen} n}{n^7}.$$

2. $$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}.$$

- Uma série alternada é a uma série cuja forma geral é

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\, a_n, \qquad \text{onde} \quad a_n > 0 \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Neste caso,

  - a sucessão geradora, u , é definida por

$$u_n = (-1)^n\, a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

  - a sucessão das somas parciais, s, é definida por

$$s_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$$

  - uma série alternada pode apresentar-se também da forma

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\, a_n, \qquad \text{com} \quad a_n > 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Teorema (Critério de Leibniz)

Se a é uma sucessão decrescente (eventualmente só a partir de uma determinada ordem), de termos positivos e tal que

$$\lim_n a_n = 0.$$

então,

$$\text{a série } \sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n \text{ é convergente.}$$

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ é convergente.

Porque se cumpre o critério de Leibniz.

- Uma vez que

$$\sum_{n\geq 1}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$$

é a série harmónica (que é divergente), concluímos que a série

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n}}{n}$$

não é absolutamente convergente, mas é simplesmente convergente.

- As séries alternadas são casos particulares das séries de termos com sinal arbitrário.

- Condição Suficiente de Divergência:

  A menos que $a_n \to 0$, a série $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge.

- Séries Geométricas:

  As séries $\sum_{n\geq 1} a\, r^n$ convergem quando $|r| < 1$; nos outros casos, divergem.

- Séries de Riemann:

  As séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ convergem quando $p > 1$; nos outros casos, divergem.

- Séries de termos não negativos:

  Usar o 'critério do Integral', os critérios de 'comparação' (com séries conhecidas), ou ainda os critérios do Limite, da Razão ou da Raíz.

- Séries de termos com sinal arbitrário:

  Estudar as séries dos módulos e recordar que a convergência absoluta implica a convergência simples.

- Séries Alternadas:

  Critério de Leibniz.