Séries de Potências

Cálculo para Engenharia

Maria Elfrida Ralha

Departamento de Matemática
(Universidade do Minho)

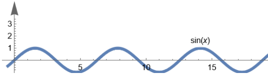
Licenciatura em Engenharia Informática

Índice

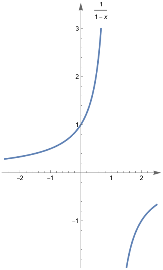
Há somas que parecem 'polinómios infinitos'...Dizem-se **séries de potências** e, tal como os polinómios, podem ser somadas, subtraídas, multiplicadas ou mesmo derivadas e integradas.

Considere-se, por exemplo, a função f, real de variável real, definida por

- $f(x) = \operatorname{sen} x$ e pensemos no seu Polinómio de Taylor....



- $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ e usemos o clássico algoritmo da divisão para dividirmos 1 por $1-x$...



- Uma série de potências, em torno de $x = a$, é uma série com a seguinte forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots + c_n (x-a)^n + \cdots ,$$

nas quais o **centro** a e os **coeficientes** c_i, com $i = 0, \cdots, n, \cdots$ são constantes reais.

Nota

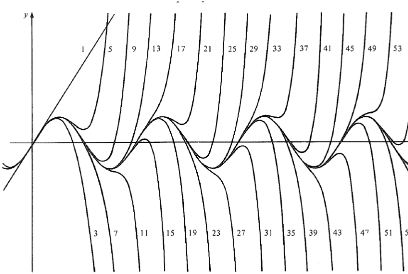
- *Série de potências, em torno de $x = 0$::* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$
- **Uma série de potências define uma função f, real de variável real, num determinado intervalo, onde converge**. *Além disso, a função é contínua e diferenciável no interior desse intervalo*

Na verdade, prova-se que

- a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$ é tal que

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

quando $x \in \mathbb{R}$.



[i] O estudo de séries de funções –particularmente, as séries de potências, da forma $\sum_{n \geq 0} c_n (x-a)^n$, com a constante real, x variável real e c_n coeficientes (termos de uma sucessão)– permitir-nos-ia, de alguma forma, fechar o ciclo/programa desta UC, que trata de funções reais de 1 variável real.

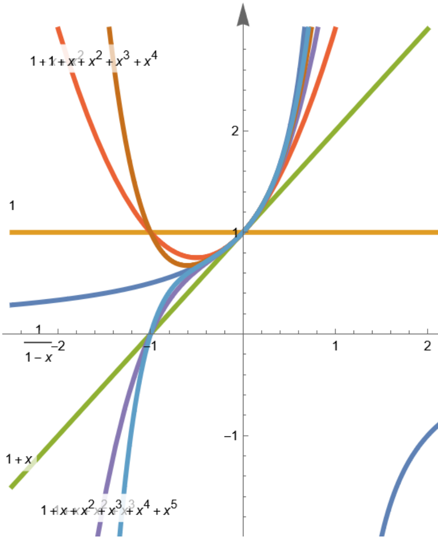
$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

Ao passo que

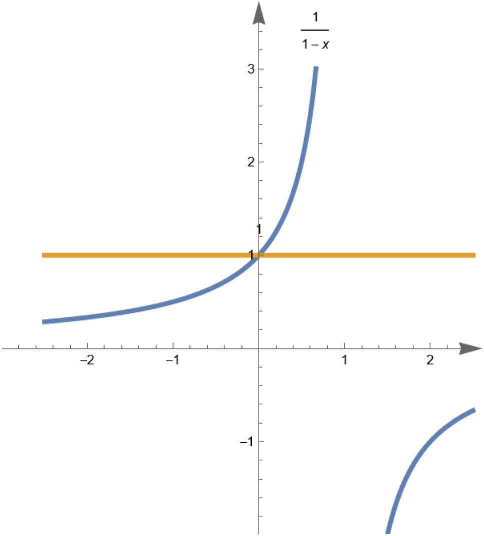
- a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ é tal que

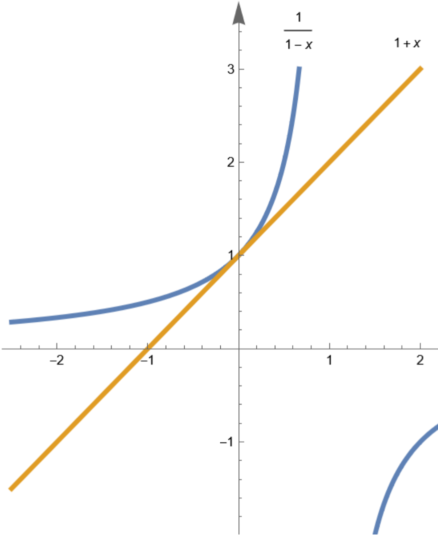
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n,$$

mas **somente quando** $x \in]-1, 1[$.

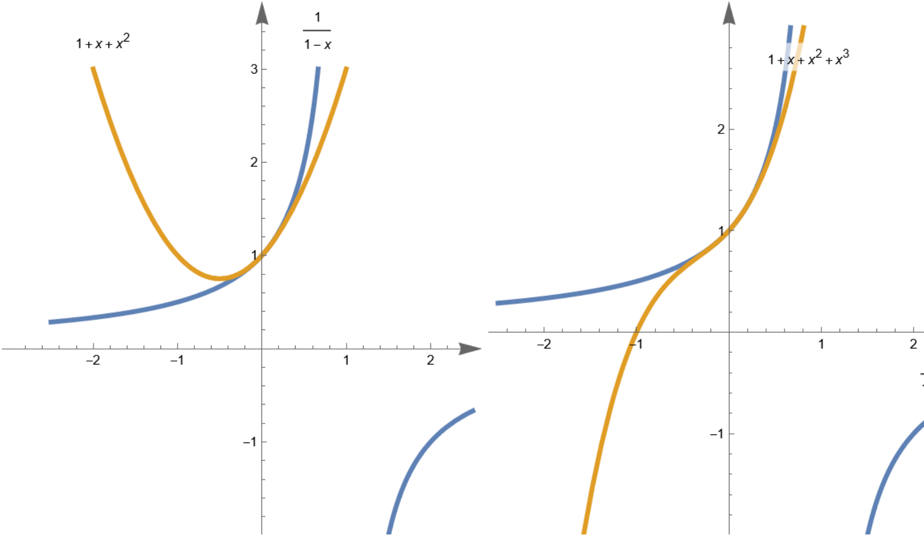


quando $x \in]-1,1[$, $\quad \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$

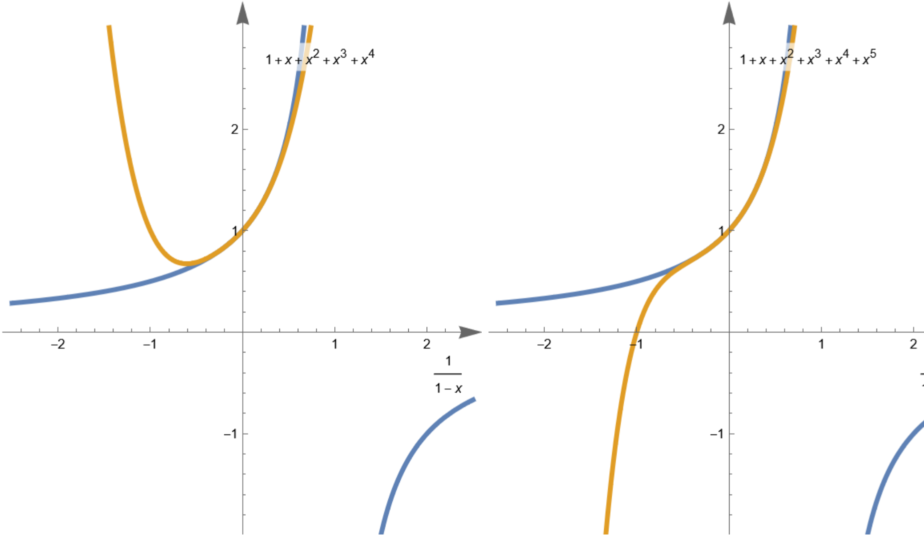




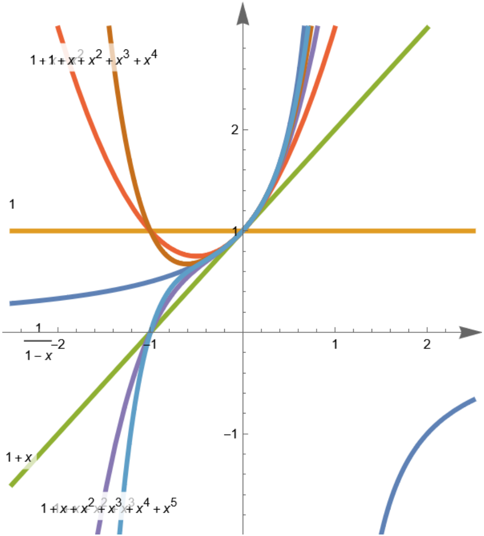
quando $x \in]-1,1[$, $\quad \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$



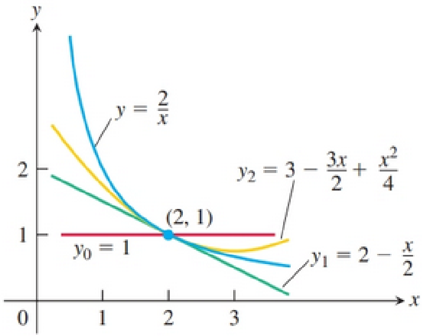
quando $x \in]-1, 1[$, $\quad \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$



quando $x \in]-1,1[$, $\quad \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$



Exemplo:: Para que valores de x, converge a série de potências $\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n$?



A série $\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n$ gera aproximações polinomiais para a função f, no intervalo I, em torno do ponto a.

Identifique f, I e a.

- O 1.º termo desta série geométrica é 1 e a razão é $r = -\frac{x-2}{2}$.
- A série converge quando $r < 1$, ou seja para $x \in]0, 4[$.
- A soma da série é $\frac{2}{x}$.

Nota

$$\frac{2}{x} = 1 - \frac{x-2}{2} + \frac{(x-2)^2}{4} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots, \qquad \textit{quando} \quad 0 < x < 4$$

Exercícios:: Para que valores de x, convergem as seguintes séries de potências?

Sugestão: Use-se o 'critério da razão'.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$

4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^{n-1}\,(n!\,x^n)$

Teorema (da convergência, para séries de potências)

Se a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots ,$$

- *converge em* $x = c \neq 0$, *então converge absolutamente para* x *tal que* $|x| < |c|$.
- *diverge em* $x = d$, *então diverge para* x *tal que* $|x| > |d|$.

O comportamento de uma série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots + c_n (x-a)^n + \cdots .$$

descreve-se por um dos seguintes casos

Caso 1 Existe um R ($\in \mathbb{R}^+$) tal que

- a série converge absolutamente para $x \in]a-R, a+R[$,
- diverge para $|x-a| > R$
- pode ou não convergir nas extremidades do intervalo, isto é, para $x = a-R$ ou $x = a+R$.

Caso 2 A série converge absolutamente para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Caso 3 A série só converge em $x = a$ (e diverge, nos outros pontos).

R diz-se o raio de convergência da série de potências.

Teorema (Multiplicação, em séries de potências)

Se as séries de potências $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ *e* $B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n$ *convergem absolutamente quando* $|x| < R$ *e* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$,
então a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n\right)$$

converge absolutamente para $A(x)\, B(x)$, *quando* $|x| < R$.

Obs: O processo de multiplicar, termo a termo as duas séries é, geralmente, longo e repetitivo. Por exemplo,

$$\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right) = 1\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right) + x\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right) + \ldots$$

Teorema (Substituição de x por $f(x)$)

Se a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ *converge absolutamente quando* $|x| < R$ *e* f *é uma função, real de variável real, contínua, então a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, (f(x))^n$$

converge absolutamente quando x *é tal que* $|f(x)| < R$*.*

Por exemplo: Sabendo que a série $\displaystyle\sum_{x=0}^{+\infty} x^n$ converge absolutamente (para $1/(1-x)$) quando $|x| < 1$, então a série

$$\sum_{x=0}^{+\infty} \left(4x^2\right)^n$$

converge absolutamente (para $1/(1-4x^2)$) quando $|4x^2| < 1 \iff \cdots \iff |x| < \dfrac{1}{2}$.

Teorema (Derivação, termo a termo)

Se a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n$ *tem raio de convergência* $R > 0$, *define uma função* f *tal que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \, (x-a)^n \,, \qquad \text{no intervalo} \quad a - R < x < a + R.$$

Nestas condições, f *é* n *vezes derivável e as respetivas derivadas obtêm-se derivando, termo a termo, a série original.Assim, as funções definidas por*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \, c_n \, (x-a)^{n-1} \\ f''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\,(n-1)\, c_n \, (x-a)^{n-2} \\ &\ldots \end{aligned}$$

convergem em qualquer ponto do intervalo $a - R < x < a + R$.

Teorema (Integração, termo a termo)

Se a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(x-a)^n$ *tem raio de convergência* $R>0$ *e define, no intervalo* $a-R<x<a+R$ *uma função* f *tal que* $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(x-a)^n$*,*

então a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ *também tem raio de convergência* R *e para* $\mathcal{C}\in\mathbb{R}$*, tem-se*

$$\int f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}+\mathcal{C},\qquad \textit{no intervalo}\quad a-R<x<a+R.$$