Cálculo para Engenharia

Funções reais de uma variável real

Maria Elfrida Ralha

Departamento de Matemática
(Universidade do Minho)

Licenciatura em Engenharia Informática

Índice

Definição

- Função real de variável real é um terno D, E e f onde

  - D e E são dois subconjuntos, não vazios, de $\mathbb{R}$ e

  - f é uma lei de formação (regra de correspondência) que a cada elemento x de D associa um **único** elemento $f(x)$ de E.

Notações e Terminologia

Nota

- *Denota-se a função por*

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow E \subseteq \mathbb{R}$$

- *usar-se-ão as notações $x \mapsto f(x)$ ou $x \rightsquigarrow f(x)$ para indicar que o elemento x (dito 'variável independente', ou 'objeto') de D é transformado por f no elemento $f(x)$ (dito 'variável dependente', ou 'imagem') de E*
- *o conjunto D designa-se domínio (ou conjunto de partida) da função*
- *o conjunto E designa-se conjunto de chegada da função*

Definições

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, com $D \neq \emptyset$. Nestas condições,

- a imagem ou contradomínio de f é o subconjunto de E definido por

$$\mathrm{CD}_f = \{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in D\}$$

- o gráfico[i] de f é o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\mathrm{G}_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in D\}$$

[i] O termo "gráfico" também se usa, por vezes, como sinónimo de "representação gráfica"!

Observações

- $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ significa que a função f a cada elemento de D faz corresponder um número real.
- $D \subset \mathbb{R}$ significa que D é um subconjunto (próprio) de $\mathbb{R}$, isto é, D é um intervalo ou é a reunião de intervalos ou ....
  Alguns exemplos:

$$D = [1,2], \qquad D =]1,2], \qquad D =]-\infty, 2], \qquad D =]1,2] \cup [5,6], \qquad D = \mathbb{N} \qquad \ldots$$

- Quando não houver dúvidas denotar-se-á a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ simplesmente por f.
- Há diferentes formas para descrever uma função[ii], nomeadamente
  - tabelas
  - representações gráficas
  - fórmulas algébricas
  - palavras
  - ...

[ii] Podemos, inclusive, usar mais do que uma em um mesmo problema.

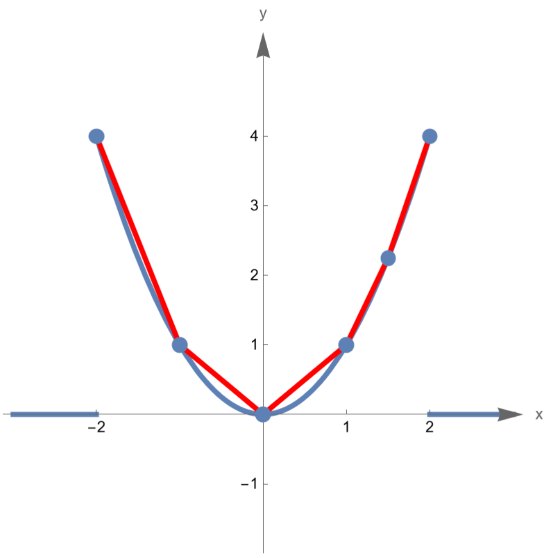
- Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Se $f(x) = x^2$,	então	$D = \mathbb{R}$	e	$CD = \mathbb{R}_0^+$
Se $f(x) = \dfrac{1}{x}$,	então	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	e	$CD = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Se $f(x) = \sqrt{x}$,	então	$D = \mathbb{R}_0^+$	e	$CD = [0, +\infty[$
Se $f(x) = \sqrt{4-x}$,	então	$D =]-\infty, 4]$	e	$CD = \mathbb{R}_0^+$
Se $f(x) = \sqrt{1-x^2}$,	então	$D = [-1, 1]$	e	$CD = [0, 1]$

Seja $f : [-2, 2] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$.

Construa-se uma tabela adequada, para $x = -2, -1, 0, 1, \dfrac{3}{2}, 2$ e representem-se, num referencial adequado, os pontos encontrados.

Como sabemos qual é a representação gráfica da função f?



O Cálculo responderá a esta questão...

[iii] O 'teste' das linhas verticais, para a FUNÇÃO.

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0,$$

onde $n \in \mathbb{N}_0$ e $a_0, \ldots, a_n$ são números reais tais que $a_n \neq 0$, denomina-se função polinomial de grau n.

  - Uma função polinomial descrita por um polinómio de grau zero diz-se função constante.
  - Uma função polinomial descrita por um polinómio de grau um diz-se função linear.

- Uma função racional g é uma função real de variável real definida por

$$g(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

onde p e q são funções polinomiais.
O domínio de g é o conjunto $D_g = \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) \neq 0\}$.

- Outras funções, reais de variáveis reais, podem ser: algébricas, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas, transcendentais, ...

- A função valor absoluto[iv] é uma função $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que pode ser definida por 'ramos', nomeadamente:

$$|x| := \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- A função identidade $id_{\mathbb{R}}$ é uma função polinomial (de 1.º grau) definida, em $\mathbb{R}$, por

$$id_{\mathbb{R}}(x) = x$$

- As funções chão e tecto:
  - A função, real de variável real, que a cada número real, x, faz corresponder 'o maior número inteiro, menor do que ou igual a x', denomina-se função chão e escreve-se

$$\lfloor x \rfloor = máx\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$$

  - A função, real de variável real, que a cada número real, x, faz corresponder 'o menor número inteiro, maior do que ou igual a x', denomina-se função tecto e escreve-se

$$\lceil x \rceil = mín\{m \in \mathbb{Z} : x \leq m\}$$

[iv] Vd. Apontamentos sobre $\mathbb{R}$, Slides1.

Operações algébricas com funções

Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$, com $A \cap B \neq \emptyset$ e f e g duas funções tais que

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g : B \longrightarrow \mathbb{R}$$

- A soma de (/diferença entre) f e g é a função $f \pm g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

- O produto de f e g é a função $f \times g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

- O quociente entre f e g é a função $\dfrac{f}{g} : D \longrightarrow \mathbb{R}$, com $D = A \cap \{x \in B : g(x) \neq 0\}$ e definida por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Composição de funções

- Sejam D_f, D_g, B, C subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, tais que $B \cap D_g \neq \emptyset$ e

$$f : D_f \longrightarrow B \quad \text{e} \quad g : D_g \longrightarrow C$$

duas funções.

A função composta de g e f, denotada $g \circ f$, é a função definida por

$$\begin{aligned} g \circ f : D &\longrightarrow C \\ x &\rightsquigarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

onde

$$D = \{x \in D_f \ : \ f(x) \in D_g\}.$$

Exercício

- Sejam

$$f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{x}$$
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g(x) = x^2.$$

Caracterize, se possível, as funções $f+g$, $f \times g$, $\dfrac{f}{g}$, $g \circ f$ e $f \circ g$.

Restrição de uma função

- A restrição de uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ a um subconjunto $X \subset A$ é a função $f|_X : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f\Big|_X(x) = f(x), \qquad \forall x \in X$$

- Um prolongamento de uma função $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ a um conjunto $A \supset X$ é uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ que coincida com g em X, isto é, tal que

$$f\Big|_X(x) = g(x), \qquad \forall x \in X$$

Nota

Uma restrição (de uma função) é única mas um prolongamento não!

- Seja $f : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$
  - Restrição de f a $X = [1,2]$ é a função $h = f\Big|_{[1,2]}$, com

$$h : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad h(x) = x^2$$

  - Prolongamento de f a $A = [-5,5]$ é, por exemplo,
    - $g : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(x) = x^2$
    - $\ell : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \ell(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,5]; \\ 0, & x \in [-5,0[\end{cases}$
    - ...

Seja $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que:

- f é uma função par quando $\quad \forall x \in D,\ (-x) \in D \quad$ e $\quad f(-x) = f(x)$

  A representação gráfica de uma função par exibe simetria relativamente ao eixo das ordenadas.

- f é uma função ímpar quando $\quad \forall x \in D,\ (-x) \in D \quad$ e $\quad f(-x) = -f(x)$

  A representação gráfica de uma função ímpar exibe simetria relativamente à origem do referencial.

- f é uma função periódica, de período p, quando
  $\forall x \in D,\ (x+p) \in D \quad$ e $\quad f(x+p) = f(x)$

- $f : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$ não é par

- $h : [-1,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad h(x) = x^2$ não é par

- $g : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(x) = x^2$ é par

- $\ell : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \ell(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,5]; \\ 0, & x \in [-5,0[\end{cases}$ não é par

Sugestão: Represente graficamente estas funções.

Limitação!

Seja $D \subset \mathbb{R}$. Diz-se que a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é

- majorada quando $\exists M \in \mathbb{R} \, : \, f(x) \leq M \qquad \forall x \in D$
- minorada quando $\exists m \in \mathbb{R} \, : \, f(x) \geq m \qquad \forall x \in D$
- limitada se f é majorada e minorada, isto é,

$$\exists A \in \mathbb{R}^+ \, : \, \forall x \in D \quad |f(x)| \leq A.$$

- crescente (em sentido lato) quando $\forall x, y \in D \qquad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- decrescente (em sentido estrito) quando $\forall x, y \in D \qquad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- monótona quando f é crescente ou decrescente.

Bijetividade

Sejam $D, E \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : D \longrightarrow E$ diz-se

- injetiva quando

$$\forall x, y \in D \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

- sobrejetiva quando

$$\forall y \in E \quad \exists x \in D : \quad f(x) = y$$

- bijetiva quando é simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Exemplo

- Não é injetiva nem sobrejetiva a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

- Não é injetiva mas é sobrejetiva a função

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto g(x) = x^2 \end{aligned}$$

- É injetiva e sobrejetiva, logo bijetiva, a função

$$\begin{aligned} h :]-\infty, 0] &\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto h(x) = x^2 \end{aligned}$$

Função inversa

Sejam D e E subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} f^{:} D &\longrightarrow E \\ x &\rightsquigarrow f(x) = y \end{aligned}$$

uma função bijetiva.

- A função de E em D que
  a $y \in E$ faz corresponder o único $x \in D$ tal que $f(x) = y$ diz-se função inversa de f e é denotada por f^{-1}.

Nota

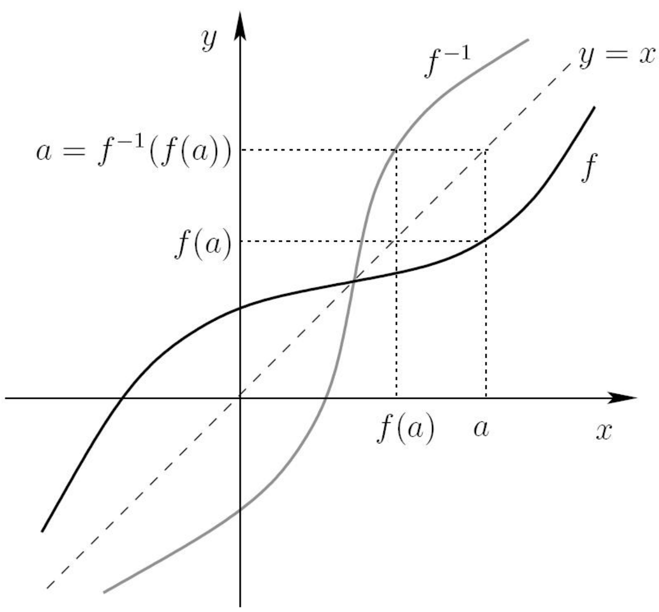
Não confundir a função inversa de f –i.é. f^{-1}– com o inverso da função f –i.é. $\frac{1}{f}$.

Seja $f : D \longrightarrow E$ uma função bijetiva.

1. Se $g : E \longrightarrow D$ é uma função bijetiva, então g é a função inversa de f se e só se
   - $g(f(x)) = x, \qquad \forall x \in D;$
   - $f(g(y)) = y, \qquad \forall y \in E.$

2. Se g é a função inversa de f, então
   - $D_f = \mathrm{CD}_g;$
   - $\mathrm{CD}_f = D_g;$
   - $g^{-1} = f.$

Partindo de uma representação gráfica da função f pode obter-se uma representação gráfica de f^{-1}. Por exemplo:



Exercício

- A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, tal que $f(x) = x^2$ tem inversa?

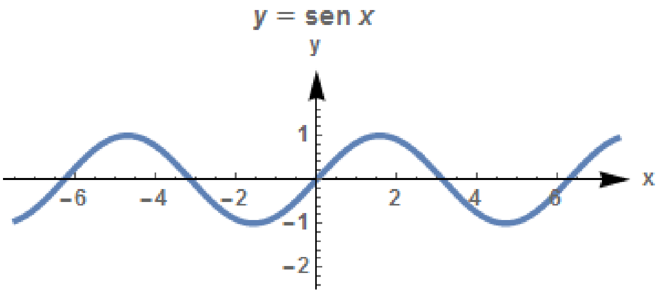
- Indique, caracterizando, uma restrição de f que admita função inversa. Designe-a por g.

- Defina a função inversa de g.

Índice

Seno

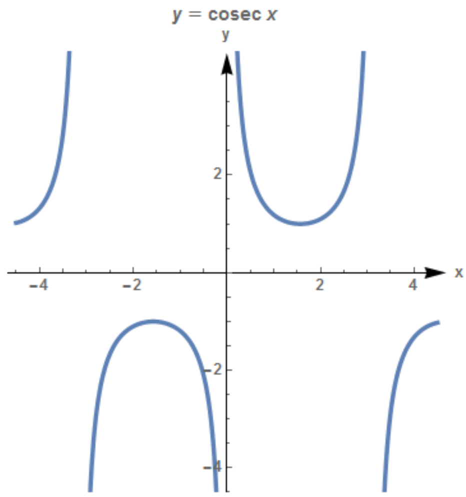
$y = \operatorname{sen} x,$
$\mathrm{D}_{\text{sen}} = \mathbb{R},$
$\mathrm{CD}_{\text{sen}} = [-1, 1]$
Período: $2\,\pi$
Paridade: Ímpar



Cossecante

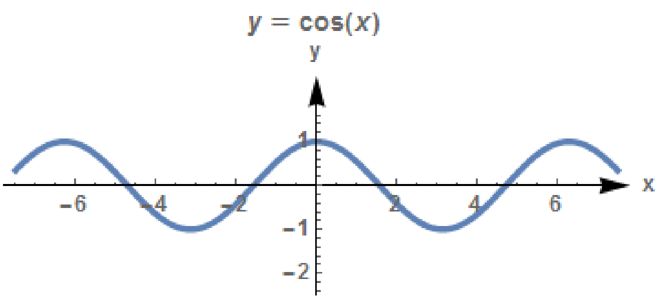
(O inverso do Seno)

$y = \operatorname{cosec} x \left(:= \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right),$
$\mathrm{D}_{\text{cosec}} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},$
$\mathrm{CD}_{\text{cosec}} = \mathbb{R} \backslash\,]-1, 1[$
Período: $2\,\pi$
Paridade: Ímpar



Cosseno

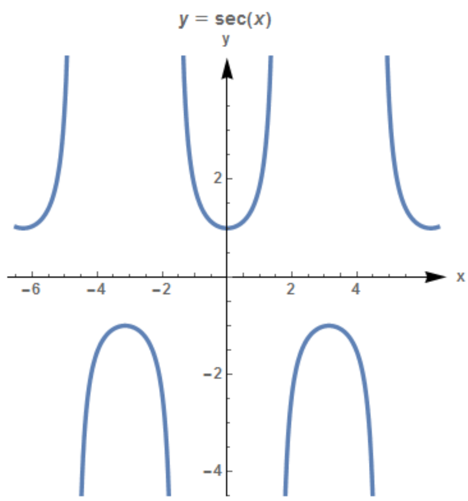
$y = \cos x,$
$\mathrm{D}_{\cos} = \mathbb{R},$
$\mathrm{CD}_{\cos} = [-1, 1]$
Período: $2\,\pi$
Paridade: Par



Secante

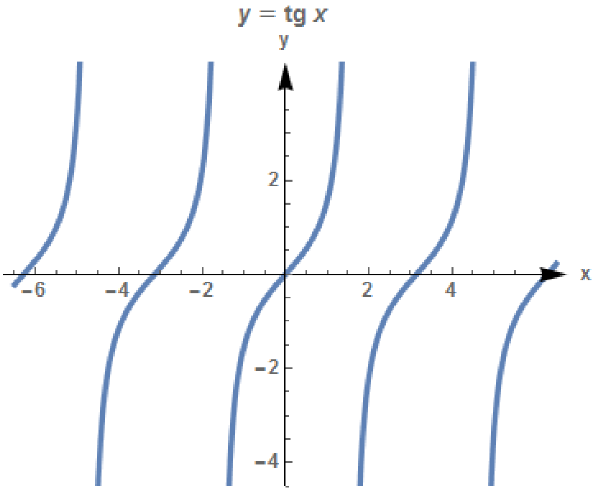
(O inverso do Cosseno)

$y = \sec x \left(:= \frac{1}{\cos x}\right),$
$\mathrm{D}_{\sec} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\,\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\},$
$\mathrm{CD}_{\sec} = \mathbb{R} \backslash\,]-1, 1[$
Período: $2\,\pi$
Paridade: Par



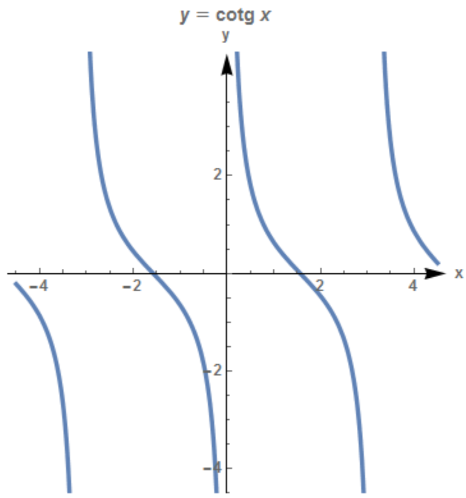
Tangente

$y = \operatorname{tg} x \left(:= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$,
$D_{\operatorname{tg}} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,
$CD_{\operatorname{tg}} = \mathbb{R}$
Período: π
Paridade: Ímpar



Cotangente

(O inverso do Tangente)
$y = \operatorname{cotg} x \left(:= \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$,
$D_{\operatorname{cotg}} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,
$CD_{\operatorname{cotg}} = \mathbb{R}$
Período: π
Paridade: Ímpar



- Fórmula Fundamental da Trigonometria:

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1.$$

- $1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta, \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta.$
- $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B,$
  $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B.$
- $\operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$
  $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$
- Lei dos cossenos: Se a, b, e c são os lados de um triângulo ABC e θ for o ângulo oposto a c, então

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

[v] Formulário disponível na plataforma e-learning. Admissível, para consulta individual e sem rasuras, nas provas de avaliação.

Exercício

Recorde e complete

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$		

Porquê?

$y = a\,f(b(x+c)) + d$ Transformações de gráficos trigonométricos

Sejam f, uma função trigonométrica e a, b, c e d números reais. A função, real de variável real, definida por

$$y = a\,f(b(x+c)) + d,$$

é tal que

- $|a|$ determina a amplitude: estiramento ou compressão verticais.
- $|b|$ determina o período: estiramento ou compressão horizontais.
- c determina um deslocamento horizontal.
- d determina um deslocamento vertical.