Cálculo para Engenharia

Mais algumas Funções Transcendentais[i]

Maria Elfrida Ralha

Departamento de Matemática
(Universidade do Minho)

Licenciatura em Engenharia Informática

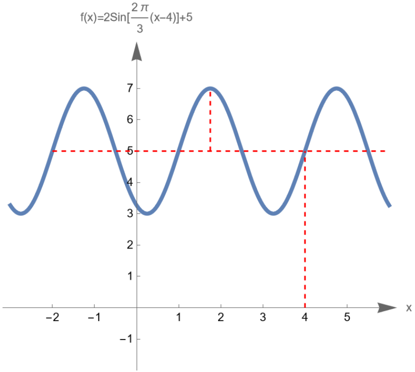
[i] Que não são 'algébricas'.

Sejam $\mathbf{f}$, uma função trigonométrica e a, b, c e d números reais.
A função, real de variável real, definida por

$$y = a\,\mathbf{f}(b(x+c)) + d,$$

é tal que

- $|a|$ determina a amplitude (estiramento ou compressão verticais).
- $|b|$ determina o período (estiramento ou compressão horizontais).
- c determina um deslocamento horizontal.
- d determina um deslocamento vertical.



- As funções seno, cossecante, cosseno, secante, tangente e cotangente são funções não bijetivas; pelo que não possuem inversa.

- Considerando restrições apropriadas destas funções, é, no entanto, possível definir as correspondentes funções inversas (dessas restrições).

Arco-seno

- A restrição bijetiva "padrão" no caso da função seno, é

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{sen}: & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & y = \operatorname{sen} x \end{array}$$

A inversa desta restrição, que se designa por arco-seno – entenda-se arco/ângulo (cujo) seno – é a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arcsen}: & [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & y & \longmapsto & x = \operatorname{arcsen} y \end{array}$$

onde $\operatorname{arcsen} y$ se refere ao único arco/ângulo do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é igual a y.

Assim,

$$x = \operatorname{arcsen} y\,,\ y \in [-1,1] \iff y = \operatorname{sen} x\,,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Arco-cossecante

- Para a função cossecante a restrição bijetiva padrão é

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{cosec}: & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus]-1,1[\\ & x & \longmapsto & \operatorname{cosec} x \end{array}$$

A sua inversa, que se designa por arco-cossecante é a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arccosec}: & \mathbb{R} \setminus]-1,1[& \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \\ & y & \longmapsto & \operatorname{arccosec} y \end{array}$$

onde $\operatorname{arccosec} y$ indica o único arco/ângulo do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ cuja cossecante é igual a y. Assim,

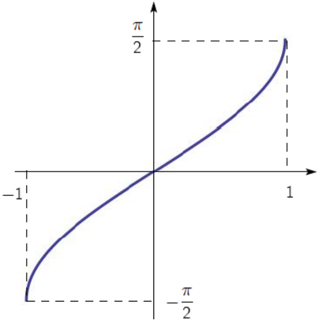
$$x = \operatorname{arccosec} y\,,\ y \in \mathbb{R} \setminus]-1,1[\iff y = \operatorname{cosec} x\,,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}.$$

Arco-seno

$y = \operatorname{arcsen} x,$

$\mathrm{D}_{\operatorname{arcsen}} = [-1, 1],$

$\mathrm{CD}_{\operatorname{arcsen}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

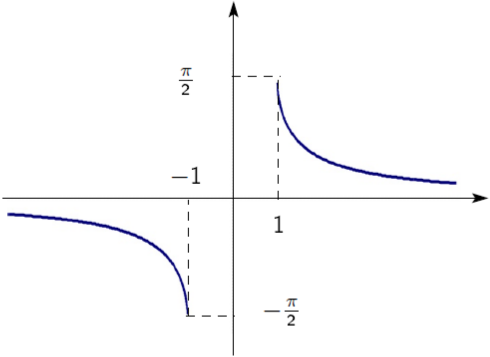


Arco-cossecante

$y = \operatorname{arccosec} x,$

$\mathrm{D}_{\operatorname{arccosec}} = \mathbb{R} \setminus]-1, 1[,$

$\mathrm{CD}_{\operatorname{arccosec}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$



Arco-cosseno

- Relativamente à função cosseno, a restrição bijetiva padrão é

$$\begin{array}{rccc} \cos: & [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

A sua inversa, que se designa por arco-cosseno – lê-se arco (cujo) cosseno – é a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arccos}: & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & y & \longmapsto & \operatorname{arccos} y \end{array}$$

onde $\operatorname{arccos} y$ indica o único arco/ângulo do intervalo $[0,\pi]$ cujo cosseno é igual a y. Assim

$$x = \operatorname{arccos} y\,,\ y \in [-1,1] \iff y = \cos x\,,\ x \in [0,\pi]\,.$$

Arco-secante

- Para a função secante a restrição bijetiva padrão é

$$\begin{array}{rccl} \sec: & [0,\pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus]-1,1[\\ & x & \longmapsto & \sec x \end{array}$$

A sua inversa, que se designa por arco-secante – lê-se arco (cuja) secante – é a função

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{arcsen}: & \mathbb{R} \setminus]-1,1[& \longrightarrow & [0,\pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\} \\ & y & \longmapsto & \mathrm{arcsec}\, y \end{array}$$

onde $\mathrm{arcsec}\, y$ indica o único arco/ângulo do intervalo $[0,\pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ cuja secante é igual a y. Assim,

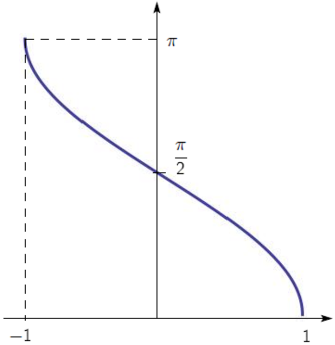
$$x = \mathrm{arcsec}\, y\,,\ y \in \mathbb{R} \setminus]-1,1[\iff y = \sec x\,,\ x \in [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Arco-cosseno

$y = \arccos x$,

$\mathrm{D}_{\arccos} = [-1, 1]$,

$\mathrm{CD}_{\arccos} = [0, \pi]$

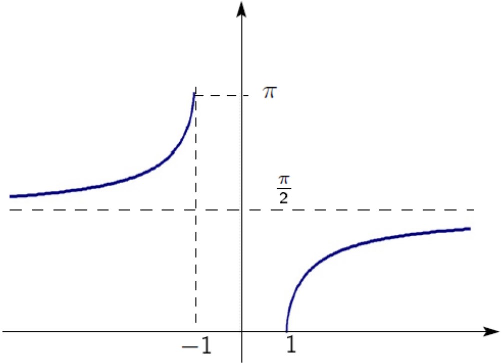


Arco-secante

$y = \operatorname{arcsec} x$,

$\mathrm{D}_{\operatorname{arcsec}} = \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$,

$\mathrm{CD}_{\operatorname{arcsec}} = [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$



Arco-tangente

- Para a função tangente considera-se a restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{tg}\ : & \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{tg}\, x \end{array}$$

A sua inversa, designada por arco-tangente – lê-se arco (cuja) tangente – é a função

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{arctg}\ : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\\ & y & \longmapsto & \mathrm{arctg}\, y \end{array}$$

onde $\mathrm{arctg}\, y$ indica o único arco/ângulo do intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ cuja tangente é igual a y. Assim

$$x = \mathrm{arctg}\, y\,,\ y \in \mathbb{R} \iff y = \mathrm{tg}\, x\,,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

Arco-cotangente

- Relativamente à função cotangente, considera-se a restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{cotg}: &]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{cotg} x \end{array}$$

  cuja inversa é a função arco-cotangente – lê-se arco (cuja) cotangente – definida por

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{arccotg}: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,\pi[\\ & y & \longmapsto & \operatorname{arccotg} y \end{array}$$

  onde $\operatorname{arccotg} y$ indica o único arco/ângulo do intervalo $]0,\pi[$ cuja cotangente é igual a y. Então

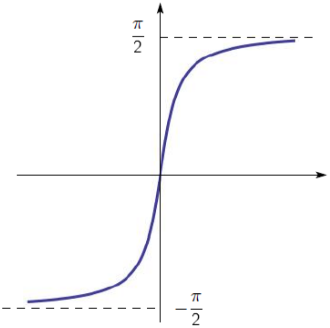
$$x = \operatorname{arccotg} y\,,\ y \in \mathbb{R} \iff y = \operatorname{cotg} x\,,\ x \in]0,\pi[\,.$$

Arco-tangente

$y = \operatorname{arctg} x$,

$\mathrm{D}_{\operatorname{arctg}} = \mathbb{R}$

$\mathrm{CD}_{\operatorname{arctg}} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

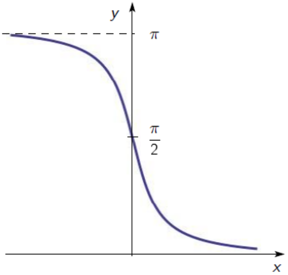


Arco-cotangente

$y = \operatorname{arccotg} x$,

$\mathrm{D}_{\operatorname{arccotg}} = \mathbb{R}$

$\mathrm{CD}_{\operatorname{arccotg}} =]0, \pi[$



- $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$.
- $\mathrm{arcsen}\, x + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
- $\mathrm{arctg}\,(-x) = \mathrm{arctg}\, x$.
- ...

Parte II

Funções Exponenciais, Logarítmicas e Hiperbólicas

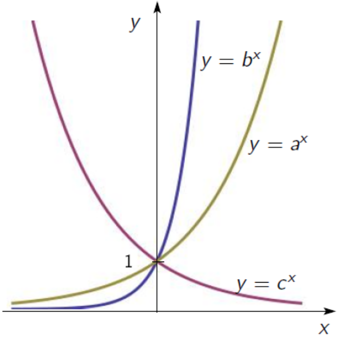
2. Funções Exponenciais & Funções Logarítmicas

3. Funções Hiperbólicas (diretas e inversas)
   - Funções Hiperbólicas Diretas
   - Funções hiperbólicas Inversas

Propriedades das funções exponenciais

Para quaisquer $x, z \in \mathbb{R}$, a função exponencial de base a, a^x, $a > 0$ verifica

(a) é uma função contínua;
(b) $a^{x+z} = a^x\, a^z$;
(c) $(a^x)^z = a^{xz}$;
(d) se $b > 0$, $(a\,b)^x = a^x\, b^x$;
(e) se $a > 1$, é crescente;
(f) se $a = 1$, é constante;
(g) se $0 < a < 1$, é decrescente.

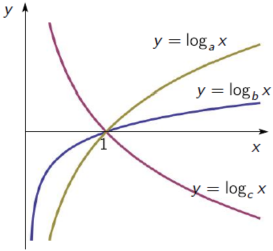


$1 < a < b$ e $0 < c < 1$

- Definimos a função logaritmo na base a, denotando-se $\log_a y$, como a função inversa da função exponencial de base a. MAS desde que[ii]

  Com $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ tem-se

$$x = \log_a y \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^x = y \qquad \forall y \in]0, +\infty[, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$



$1 < a < b$ e $0 < c < 1$

[ii] Para $a = 1$ a função a^x não é bijetiva, logo não admite inversa e, nos restantes casos, recordar que o domínio de uma função inversa coincide com contradomínio da função direta.

- Propriedades da função logaritmo

$\forall x, z \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o logaritmo de base $a\,(> 1)$ é tal que

(a) é uma função contínua;

(b) $\log_a(xz) = \log_a x + \log_a z$;

(c) $\log_a \dfrac{x}{z} = \log_a x - \log_a z$;

(d) $\log_a x^{\alpha} = \alpha \log_a x$.

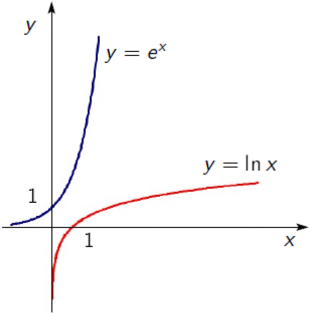
Nota

A função é *exponencial natural* *quando a base da função exponencial é o número de Euler*[a] *e.*

[a] Euler (1707 − 1783) obtém $e := \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para explicar um problema de juros compostos enunciado por Jacob Bernoulli (1655 − 1705).

- O logaritmo natural de y, denotado $\ln y$, é função inversa da função exponencial natural (de base e):

$$x = \ln y \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^x = y \qquad \forall y \in]0, +\infty[, \ \forall x \in \mathbb{R};$$



- A função seno hiperbólico é a função real de variável real definida por

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{senh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

- A função cossecante hiperbólica é o inverso do seno hiperbólico, isto é, a função real de variável real definida por

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{cosech}: & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{cosech} x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}} \end{array}$$

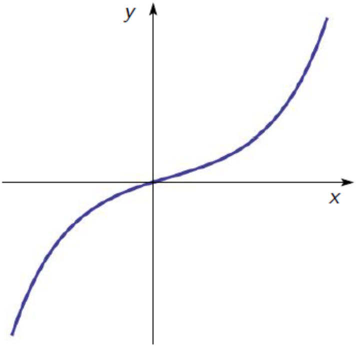
Seno hiperbólico

$y = \sinh x$,

$\mathrm{D}_{\sinh} = \mathbb{R}$

$\mathrm{CD}_{\sinh} = \mathbb{R}$

<u>Paridade</u>: Ímpar



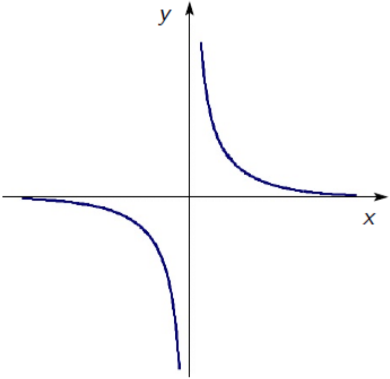
Cossecante hiperbólica

$y = \operatorname{cosech} x$,

$\mathrm{D}_{\operatorname{cosech}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\mathrm{CD}_{\operatorname{cosech}} = \mathbb{R}$

<u>Paridade</u>: Ímpar

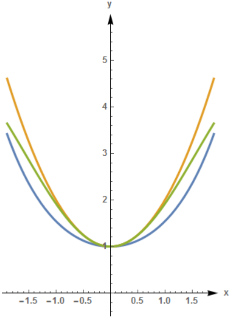


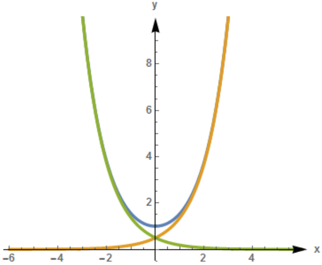
A "**Catenária**"

- A função cosseno hiperbólico é a função real de variável real definida por

$$\begin{array}{rccl} \cosh : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

cuja representação gráfica é a (célebre) CATENÁRIA





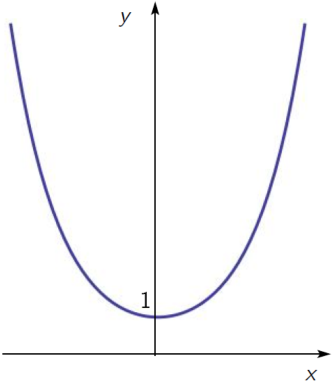
Cosseno hiperbólico

$y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,

$\mathrm{D}_{\cosh} = \mathbb{R}$

$\mathrm{CD}_{\cosh} = [1, +\infty[$

Paridade: Par



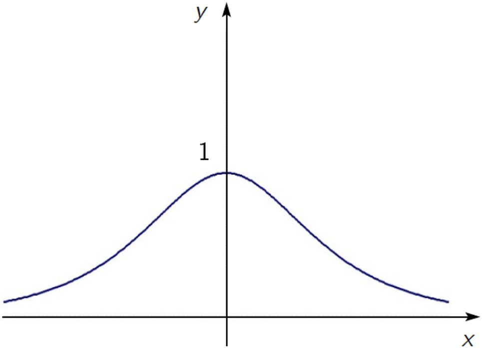
Secante hiperbólica

$y = \operatorname{sech} x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$,

$\mathrm{D}_{\operatorname{sech}} = \mathbb{R}$

$\mathrm{CD}_{\operatorname{sech}} =]0, 1]$

Paridade: Par



- A função tangente hiperbólica é a função real de variável real definida por

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{tgh} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}$$

- A função cotangente hiperbólica é a função real de variável real definida por

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{cotgh} : & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \end{array}$$

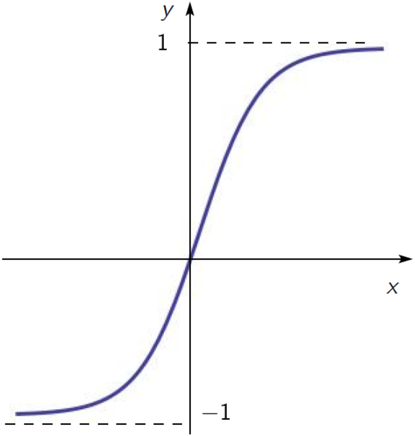
Tangente hiperbólica

$y = \operatorname{tgh} x,$

$\mathrm{D_{tgh}} = \mathbb{R}$

$\mathrm{CD_{tgh}} =]-1, 1[$

<u>Paridade</u>: Ímpar



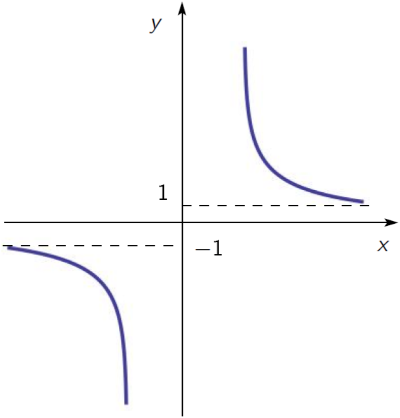
Cotangente hiperbólica

$y = \coth x,$

$\mathrm{D_{cotgh}} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$\mathrm{CD_{cotgh}} = \mathbb{R}\backslash[-1, 1]$

<u>Paridade</u>: Ímpar



A função seno hiperbólico é

- estritamente crescente;

A função cosseno hiperbólico é

- não monótona mas
  - estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$;
  - estritamente crescente em $[0, +\infty[$;

A função cossecante hiperbólica é

- é não monótona mas é decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$;

A função secante hiperbólica é

- não monótona mas
  - estritamente crescente em $]-\infty, 0]$;
  - estritamente decrescente em $[0, +\infty[$;

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se

- $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$
- $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ (análogo à fórmula fundamental da trigonometria)
- $1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
- $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$
- $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$
- $\cosh^2 x = \dfrac{\cosh 2x + 1}{2}$
- $\operatorname{senh}^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{2}$

- Argumento do seno hiperbólico
- Argumento da cossecante hiperbólica
- Argumento do cosseno hiperbólico
- Argumento da secante hiperbólica
- Argumento do tangente hiperbólica
- Argumento do cotangente hiperbólica

- A função seno hiperbólico é bijetiva.

- A sua função inversa, que se designa por argumento do seno hiperbólico, é a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argsenh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{argsenh} y \end{array}$$

Assim,

$$x = \operatorname{argsenh} y,\ \ y \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \operatorname{senh} x = y,\ \ x \in \mathbb{R}$$

e

$$\operatorname{argsenh} y \ = \ \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\ \right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Como definir $\operatorname{argsenh} y$?

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} y = \operatorname{senh} x \Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x}-1}{2e^x} & \\ \Leftrightarrow\ e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 & \qquad \text{equação do 2.º grau em } e^x \\ \Leftrightarrow\ e^x\ =\ y \pm \sqrt{y^2+1}\,. & \end{aligned}$$

A solução com o sinal $+$ é a única admissível, pois

$$e^x > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad y - \sqrt{y^2+1} < 0\,,\ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Mas

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right),$$

donde

$$\operatorname{argsenh} y \ = \ \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\ \right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

- A função cossecante hiperbólica é bijetiva.
- A sua função inversa, que se designa por argumento da cossecante hiperbólica, é a função

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{argcosech}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ & y & \longmapsto & \operatorname{argcosech} y \end{array}$$

Assim,

$$x = \operatorname{argcosech} y,\ y \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \operatorname{cosech} x = y,\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

e

$$\operatorname{argcosech} y \ = \ \ln\left(\frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2}+1}\,\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Demonstre-se!

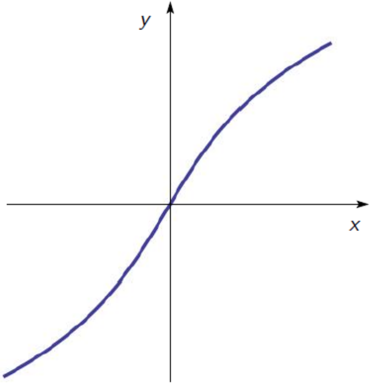
Argumento
do seno hiperbólico

$y = \operatorname{argsenh} x\,,$

$\mathrm{D}_{\text{argsenh}} = \mathbb{R}$

$\mathrm{CD}_{\text{argsenh}} = \mathbb{R}$

Paridade: Ímpar



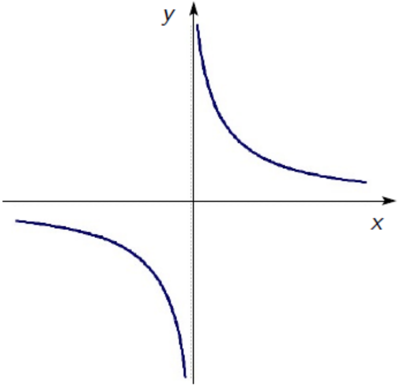
Argumento
da cossecante hiperbólica

$y = \operatorname{argcosech} x\,,$

$\mathrm{D}_{\text{argcosech}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\mathrm{CD}_{\text{argcosech}} = \mathbb{R}$

Paridade: Ímpar



- A função cosseno hiperbólico não é bijetiva mas é possível considerar a uma sua restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \cosh\colon & [0,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \cosh x \end{array}$$

- A função inversa desta restrição, que se designa por argumento do cosseno hiperbólico, é a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argcosh}\colon & [1,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ & y & \longmapsto & \operatorname{argcosh} y \end{array}$$

Assim,

$$x = \operatorname{argcosh} y,\ \ y \in [1,+\infty[\iff \cosh x = y,\ \ x \in [0,+\infty[$$

e

$$\operatorname{argcosh} y \ = \ \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\ \right),\ \ y \in [1,+\infty[$$

Demonstre-se!

- A função secante hiperbólica não é bijetiva, mas é possível considerar uma sua restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{sech}: & [0,+\infty[& \longrightarrow &]0,1] \\ & x & \longmapsto & \operatorname{sech} x \end{array}$$

- A função inversa desta restrição, que se designa por argumento da secante hiperbólica, é a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argsech}: &]0,1] & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ & y & \longmapsto & \operatorname{argsech} y \end{array}$$

Assim,

$$x = \operatorname{argsech} y,\ \ y \in]0,1] \iff \operatorname{sech} x = y,\ \ x \in [0,+\infty[$$

e

$$\operatorname{argsech} y \ = \ \ln\left(\frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}\ \right),\ \ y \in]0,1]$$

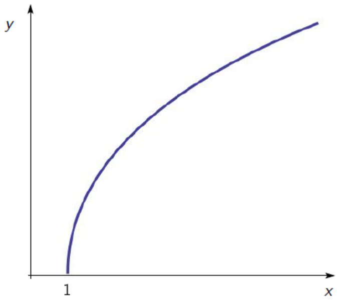
Demonstre-se!

Argumento
do cosseno hiperbólico

$y = \operatorname{argcosh} x\,,$

$\mathrm{D}_{\operatorname{argcosh}} = [1, +\infty[$

$\mathrm{CD}_{\operatorname{argcosh}} = [0, +\infty[$

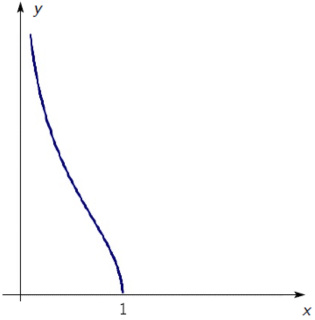


Argumento
da secante hiperbólica

$y = \operatorname{argsech} x\,,$

$\mathrm{D}_{\operatorname{argsech}} =]0, 1]$

$\mathrm{CD}_{\operatorname{argsech}} = [0, +\infty[$



A função argumento do seno hiperbólico é

- contínua;
- estritamente crescente;

A função argumento do cosseno hiperbólico é

- contínua;
- estritamente crescente;

- A função tangente hiperbólica não é sobrejetiva mas é possível considerar a sua restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{tgh}\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ & x & \longmapsto & \operatorname{tgh} x \end{array}$$

- A inversa desta restrição, que se designa por argumento da tangente hiperbólica, é a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argtgh}\colon &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \operatorname{argtgh} y \end{array}$$

onde $$x = \operatorname{argtgh} y,\ \ y \in\,]-1,1[\iff \operatorname{tgh} x = y,\ \ x \in \mathbb{R}$$

e $$\operatorname{argtgh} y \;=\; \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right),\ \ y \in\,]-1,1[\,.$$

Demonstre-se!

- A função $\operatorname{cotgh}\,:\mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ não é sobrejetiva mas é possível considerar a sua restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{cotgh}: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus[-1,1] \\ & x & \longmapsto & \operatorname{cotgh} x \end{array}$$

- A inversa desta restrição, que se designa por argumento da cotangente hiperbólica, é a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argcotgh}: & \mathbb{R}\setminus[-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ & y & \longmapsto & \operatorname{argcotgh} y \end{array}$$

onde

$$x=\operatorname{argcotgh} y,\ \ y\in\ \mathbb{R}\setminus[-1,1]\iff \operatorname{cotgh} x=y,\ \ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

e

$$\operatorname{argcotgh} y=\ln\left(\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}\right),\ \ y\in\mathbb{R}\setminus[-1,1]$$

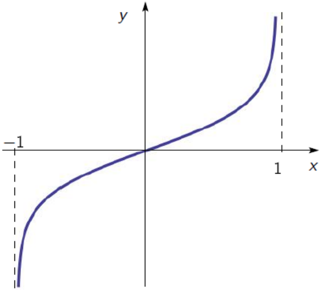
Demonstre-se!

Argumento da tangente hiperbólica

$y = \operatorname{argtgh} x$,

$\mathrm{D}_{\operatorname{argtgh}} =]-1, 1[$,

$\mathrm{CD}_{\operatorname{argtgh}} = \mathbb{R}$

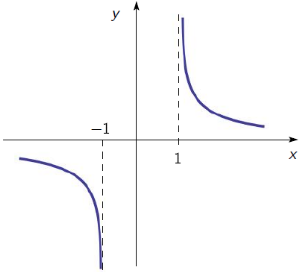


Argumento da cotangente hiperbólica

$y = \operatorname{argcotgh} x$,

$\mathrm{D}_{\operatorname{argcotgh}} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

$\mathrm{CD}_{\operatorname{argcotgh}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



A função argumento da tangente hiperbólica é

- contínua;
- estritamente crescente;

A função argumento da cotangente hiperbólica é

- contínua;
- decrescente;

Tal como os pontos cujas coordenadas são $(\cos u, \operatorname{sen} u)$ 'percorrem' o círculo unitário centrado na origem do referencial, as funções definidas por $x = \cosh u$ e $y = \operatorname{senh} u$ definem as coordenadas de um ponto que 'percorre' o ramo direito da hipérbole definida por

$$x^2 - y^2 = 1.$$