Cálculo para Engenharia

LIMITE(s) e CONTINUIDADE, de uma função real de variável real

Maria Elfrida Ralha

Departamento de Matemática
(Universidade do Minho)

Licenciatura em Engenharia Informática

Índice

Ex: Considere-se a função (real de uma variável real) definida, em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Como se comporta a função f 'próximo' de $x = 1$?

Nota

- $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$, i. é, $f(1)$, não está definido. Mas
- podemos definir $f(x)$, tão próximo quanto queiramos de 2, desde que tomemos x (no domínio) suficientemente próximos de 1; por exemplo

x	.9	1.1	...	.9999999
$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$	1.9	2.1	...	...

- Um número real $a \in \mathbb{R}$ diz-se um ponto de acumulação de D e escreve-se $a \in D'$ quando

  para todo o $r > 0$ existe $x \in D$ tal que $0 < |x - a| < r$.

Nota

- a ser um ponto de acumulação de D não significa que $a \in D$.
- [Ideia intuitiva]: $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de D quando estiver "rodeado" por pontos de D.
- Ao conjunto D', dos pontos de acumulação de D, chamamos conjunto derivado de D.

- $D =]-1, 2], \qquad D' =$

- $D = [-1, 5] \backslash \{0, 2\}, \qquad D' =$

- $D = \{-1, 1, 2\}, \qquad D' =$

LimiteS

Sejam $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, real de variável real, definida em D e $\boxed{a \in D'}$.

- O número real ℓ é o limite, segundo Cauchy, de $f(x)$, quando x tende para a, e escreve-se

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$$

quando

$$\forall \delta > 0,\ \exists \varepsilon > 0 :\ (x \in D\ \wedge\ 0 < |x - a| < \varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \delta.$$

- Na definição anterior ℓ pode ser 0 (zero), mas não pode ser ∞ (infinito). Porquê?

- $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \ (x \in D \ \wedge \ 0 < |x - a| < \varepsilon) \Longrightarrow \ |f(x) - \ell| < \delta$, **pode ler-se** da seguinte forma:

  "dado um número positivo δ, arbitrariamente pequeno, existe um número real positivo ε, suficientemente pequeno, tais que, se $x \in D$, $x \neq a$ e a distância de x a a é menor do que ε, então a distância do correspondente $f(x)$ a ℓ é menor do que δ";

- Escrever-se-á

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$$

  sempre que os números $f(x)$ se aproximam de ℓ, desde que x se aproxime de $a \in D'$, percorrendo apenas de D (mas sem nunca atingir o ponto a. Porquê?)

Ex: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Verifique-se (por definição) que

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \iff$$

$$\overset{\text{por definição}}{\iff} \left(\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \ (x \in D \ \wedge \ 0 < |x - 1| < \varepsilon\,) \Longrightarrow \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \delta \right)$$

Demonstração:

$\exists \varepsilon$?

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \quad \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \delta \overset{\text{porquê?}}{\iff} |x + 1 - 2| < \delta$$

$$\iff |x - 1| < \delta$$

Faça-se, pois,

$$\varepsilon = \delta.$$

Teorema (Unicidade do limite)

Sejam $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$.
Se

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = \ell_2,$$

então

$$\ell_1 = \ell_2\,.$$

Teorema

Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$.
Se

$$\lim_{x \to a} g(x) = 0 \quad \text{e} \quad f \text{ é limitada em } \quad D \backslash \{a\},$$

então

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

Teorema (Enquadramento de limites)

Sejam $f, g, h\colon D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$ tais que

$$\forall x \in D \setminus \{a\}, \qquad h(x) \leq f(x) \leq g(x).$$

Se $\lim\limits_{x \longrightarrow a} h(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = \ell$, então $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$.

Teorema (Aritmética dos limites)

Sejam $f, g\colon D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$.
Se existirem os seguintes limites

$$\ell = \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{e} \quad m = \lim_{x \to a} g(x),$$

então

- $\displaystyle \lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = \ell \pm m.$
- $\displaystyle \lim_{x \to a} (f \times g)(x) = \ell m.$
- $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\ell}{m}$, desde que $m \neq 0$.

Seja f: $D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

- [Limites no infinito] O que acontece se D for ilimitado –à direita ou à esquerda– e se fizer $x \in D$ tender para $+\infty$ ou $-\infty$?

Qual o significado de

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell \qquad ?$$

Seja f: $D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

- [Limites infinitos] Dado $a \in D'$, qual o significado de

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty?$$

[Limites no infinito] Seja $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ e D um conjunto não limitado.

- Diz-se que $f(x)$ tende para ℓ quando x tende para $+\infty$ e escreve-se $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$ quando

$$\forall \delta > 0, \exists A > 0 : (x \in D \wedge x > A) \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \delta.$$

- Diz-se que $f(x)$ tende para ℓ quando x tende para $-\infty$ e escreve-se $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell$ quando

$$\forall \delta > 0, \exists A > 0 : (x \in D \wedge x < -A) \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \delta.$$

[Limites infinitos] Seja $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$. Diz-se que

- Diz-se que $f(x)$ tende para $+\infty$ quando x tende para a e escreve-se $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$ quando

$$\forall A > 0, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D \wedge 0 < |x - a| < \varepsilon) \Longrightarrow f(x) > A.$$

- Diz-se que $f(x)$ tende para $-\infty$ quando x tende para a e escreve-se $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty$ quando

$$\forall A > 0, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D \wedge 0 < |x - a| < \varepsilon) \Longrightarrow f(x) < -A.$$

Se

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = -\infty,$$

o que se pode dizer sobre o limite

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]?$$

- Diz-se que $+\infty + (-\infty)$ é uma indeterminação.
- Outras indeterminações são:

$$0 \cdot \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}.$$

Nota

Veremos como 'levantar' todas estas indeterminações, quando se estudarem as funções derivadas!

- Diz-se que NÃO EXISTE

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$$

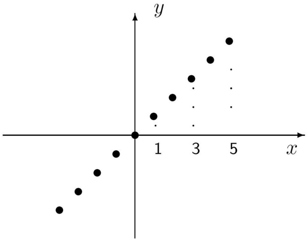
quando, por exemplo,

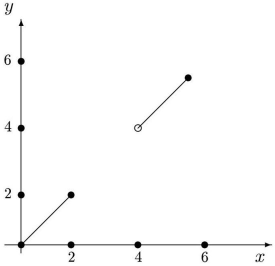
  - $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x)$. Ou, analogamente, para qualquer outro limite 'trajetorial' (para além dos 'laterais').
  - $f(x) \longrightarrow \infty$, quando $x \longrightarrow a$.
  - em situações análogas a $\lim_{x \longrightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, ou $\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$ com $a \in \mathbb{R}$ e f a função de Dirichlet.

Índice

- Adotaremos uma definição de continuidade segundo a qual as seguintes funções, reais de variável real, são ambas contínuas.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : [0,2] \cup \,]4,6] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$





- Os pontos de $D \subset \mathbb{R}$ que não estão em D' dizem-se pontos isolados, isto é, $x \in D$ é ponto isolado de D se existe $r > 0$ tal que

$$]x - r, x + r[\, \cap D = \{x\}.$$

Seja $f \colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$, isto é, a é **um ponto do seu domínio**.

- A função f é contínua em $a \in D$ quando
  - a é ponto isolado de D
    ou
  - $a \in D'$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Diz-se que:

- $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a quando $f(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$;
- $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em b quando $f(b) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$;
- f é contínua em D quando f é contínua em qualquer (todos) $x \in D$.

- [Aritmética das funções contínuas]

  Sejam $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas em $a \in D$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante. Então as funções

  - $f + g$, αf e fg são contínuas em a;
  - $\dfrac{f}{g}$ é contínua em a desde que $g(a) \neq 0$.

- [Continuidade da função composta]

  Sejam $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(D) \subset B$.
  Se f é contínua em $a \in D$ e g é contínua em $b = f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a.

Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. f contínua, g contínua, $g \circ f$ contínua:

$$f(x) = 2x, \qquad g(x) = x^3 \qquad \text{e} \qquad (g \circ f)(x) = 8x^3, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. f contínua, g descontínua, $g \circ f$ contínua:

$$f(x) = 2, \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 5 \\ 0, & x = 5 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad (g \circ f)(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. f descontínua, g contínua, $g \circ f$ contínua:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}, \qquad g(x) = 5 \qquad \text{e} \qquad (g \circ f)(x) = 5, \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. f e g descontínuas, $g \circ f$ contínua:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 5 \\ 0, & x = 5 \end{cases}$$

e

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 1, & f(x) \neq 5 \\ 0, & f(x) = 5 \end{cases} = 1, \text{ pois } f(x) \neq 5 \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Há contradição com o teorema? Não! Porquê?

- [Continuidade da função inversa]

  Se I e J são intervalos reais e $f : I \longrightarrow J$ é uma função bijetiva e contínua, então f^{-1} existe e é contínua.

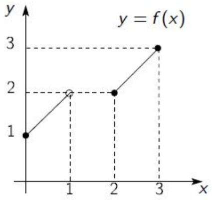
Exemplo Contradição com o teorema?

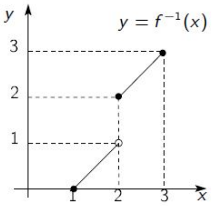
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \le x < 1 \\ x, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

f é contínua

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1, & 1 \le x < 2 \\ x, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

f^{-1} é descontínua





Considere-se função $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Diz-se que $a \in D$ é um ponto de descontinuidade de f, ou que f possui uma descontinuidade no ponto $a \in D$, quando se verificar uma das seguintes condições:

  - $a \in D'$ e não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;

  - $a \in D'$ existe $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\ell \neq f(a)$.