Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}$

Cálculo para Engenharia

Maria Elfrida Ralha

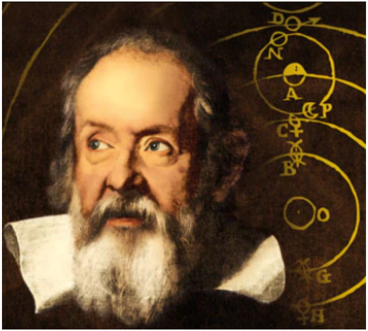
Departamento de Matemática
(Universidade do Minho)

Licenciatura em Engenharia Informática

Índice

Galileu (1564-1642) e a queda livre de objetos

Lei de Galileu:: Sendo a gravidade a única força que atua sobre o objeto e $f(t)$ a distância ao chão (em metros), depois de t segundos,



$$f(t) = 4.9\, t^2.$$

Nestas condições, a velocidade média do objeto, no intervalo $[t_1, t_2]$ é dada por

$$\frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

Velocidade média nos primeiros 2 segundos:: ...

$9.8\,\dfrac{m}{s}$

Velocidade média desde o segundo 1 até ao 2:: ...

$14.7\,\dfrac{m}{s}$

Nestas condições, a velocidade média do objeto, no intervalo 'pequeno' $[t_0, t_0 + h]$ é dada por

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h},$$

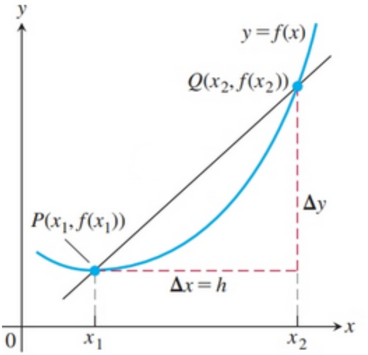
fórmula esta que NÃO pode ser usada para calcular a velocidade instantânea, em t_0.PORQUÊ?

- Qual a velocidade média em intervalos cujo incío é $t_0 = 1$? E $t_0 = 2$? E quando $h \to 0$?

A razão incremental da função f, real de variável real, definida por $y = f(x)$, no intervalo $[x_1, x_2]$, é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \qquad h \neq 0.$$

Geometricamente,



é o declive da reta (secante) que passa pelos pontos $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$. À medida que o ponto Q, percorrendo a curva, se aproxima de P....

Sejam $f\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ e $\boxed{a\in(D\cap D')}$.

- Diz-se que a função f é derivável no ponto $a\in(D\cap D')$ quando existe o limite da "razão incremental", isto é,quando existe

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Este limite representa-se por $f'(a)$ e diz-se

derivada de f em a[i].

[i] Uma forma equivalente de definir a derivada de f em a é

$$f'(a)=\lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

e que resulta imediatamente quando se toma $x=a+h$, na definição anterior.

- derivada à esquerda de f em a (quando a é ponto de acumulação à esquerda)

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- derivada à direita de f em a (quando a é ponto de acumulação à direita)

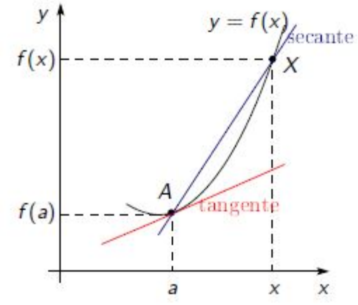
$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Nota

Quando $f \colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D \cap D'_- \cap D'_+$ tem-se, naturalmente e uma vez que estamos a lidar com "limites", que f é derivável em a se e só se existirem e forem iguais as derivadas laterais $f'_-(a)$ e $f'_+(a)$.

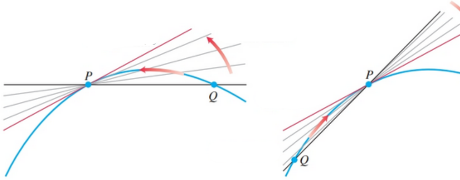
O declive m da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto de coordenadas $(a, f(a))$ é o limite dos sucessivos declives das retas secantes definidas por A e X, à medida que X se aproxima de A,

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} .$$

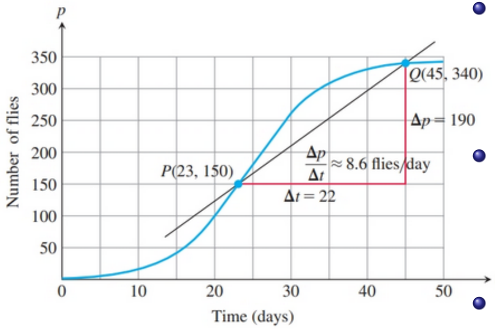


Nota

O ponto X pode estar à direita ou à esquerda.



Na figura, representa-se uma experiência conduzida, durante 50 dias com uma população de moscas da fruta (contada em intervalos de tempo 'regulares').



- Qual o crescimento populacional, médio, ocorrido entre os dias 23 e 45?
- Qual o crescimento populacional, médio, ocorrido entre os dias 23 e 27?
- Quão rápido foi o crescimento populacional no dia 23?

Considere-se a parábola, definida por $y = x^2$, e o ponto $P(2, 4)$.

- Determinem-se os declives das retas secantes que passam por P.
- Qual será, então, o declive da reta tangente à parábola, no ponto P?
- Defina-se a reta tangente à parábola em P.

Considerem-se as funções f e g e h, reais de variável real, definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad ; \quad h(x) = \sqrt[3]{x}$$

- Terão os gráficos destas funções, tangentes na origem?

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $a \in D$.

- A reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ está definida pela equação

$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a).$$

- A reta normal ao gráfico de f em $(a, f(a))$ quando
  - $f'(a) \neq 0$, define-se por
  $$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}\,(x - a)$$
  - $f'(a) = 0$, define-se por
  $$x = a$$

Nota

1. *Dizemos que uma curva (contínua) admite uma tangente vertical no ponto de abcissa x_0, quando o limite da correspondente razão incremental for um infinitamente grande.*
2. *A reta normal ao gráfico de f em $(a, f(a))$ é a reta perpendicular à reta tangente ao gráfico nesse ponto.*

Quando f é derivável em a

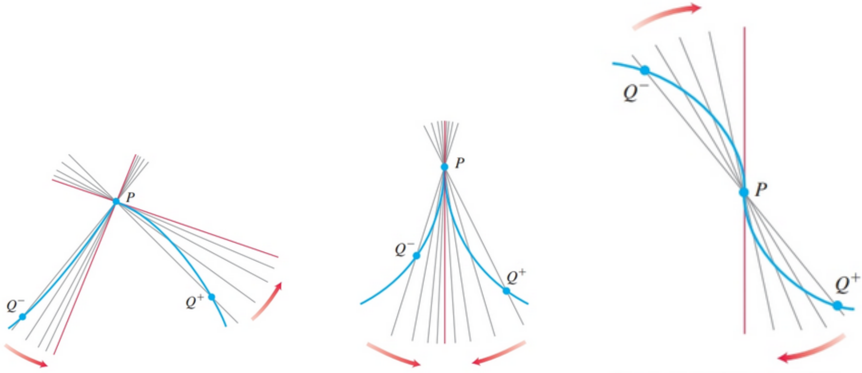
i) a curva definida por $y = f(x)$ é "suave" em $x = a$, isto é, o ponto $(a, f(a))$ não é um ponto anguloso;

Ex.: $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$; $a = 0$.

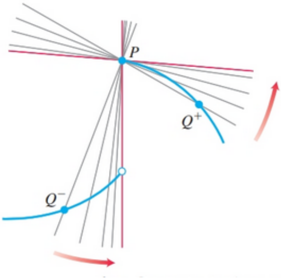
ii) a reta tangente definida por $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ "confunde-se" com a curva (que representa f), numa vizinhança de a;

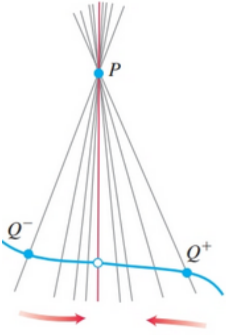
iii) o polinómio definido por $f(a) + f'(a)(x - a)$, de grau ≤ 1, pode usar-se como aproximação para f perto de a.

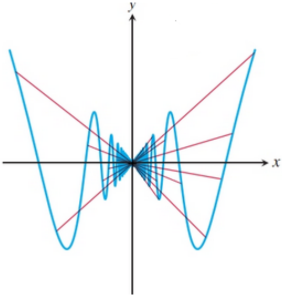
Exemplos: funções que NÃO têm derivada, em um ponto



Exemplos: funções que NÃO têm derivada, em um ponto (cont.)







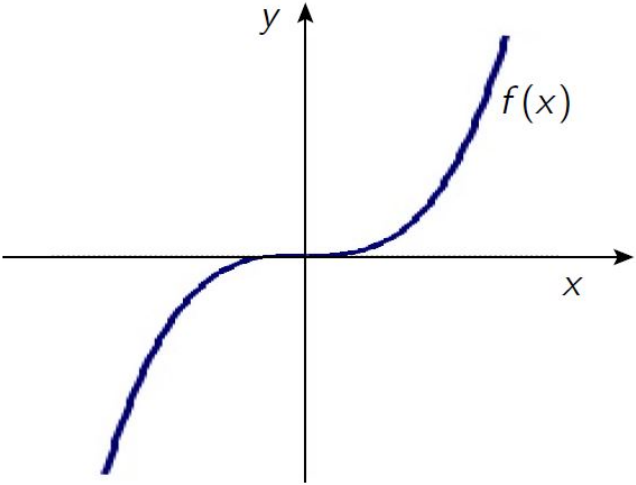
Seja $f\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $a,b\in D$ e $A\subset D$.

- Diz-se que
  - f é derivável em $[a,b]$ quando f é derivável em qualquer $x\in\,]a,b[$ e existem as derivadas laterais $f'_+(a)$ e $f'_-(b)$;
  - f é derivável em A quando f é derivável em qualquer $a\in A$;
  - f é derivável quando f é derivável em todo o domínio D.
- Se f é derivável, a função

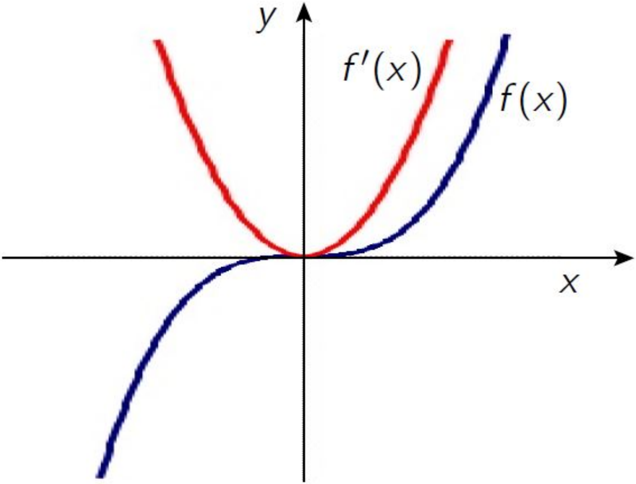
$$\begin{array}{cccc} f' : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

diz-se a função derivada de f.

Exemplo



Exemplo



Teorema (Continuidade de funções deriváveis)

Se $f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável em $a \in D \cap D'$,

então f é contínua em a.

[Regras básicas de derivação]

Sejam $f, g\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de domínio D, deriváveis no ponto $a \in D$.

Então:

(a) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$;

(b) $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$;

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$, desde que $g(a) \neq 0$.

Para $x \in \mathbb{R}$ tem-se

- $\operatorname{senh}' x = \cosh x$;
- $\operatorname{cosech}' x = -\operatorname{cosech} x \coth x$;
- $\cosh' x = \operatorname{senh} x$;
- $\operatorname{sech}' x = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$
- $\operatorname{tgh}' x = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$;
- $\operatorname{cotgh}' x = \dfrac{1}{\operatorname{senh}^2 x} = \operatorname{cosech}^2 x \, , \qquad x \neq 0$.

[Sugestão:] Demonstre as igualdades anteriores.

Teorema (Derivada da função composta)

Sejam $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$, com $u(D) \subset B \subset \mathbb{R}$, $a \in D \cap D'$ e $b = u(a) \in B$.

Se u é derivável em a e g é derivável em b,
então $g \circ u$ é derivável em a, tendo-se

$$(g \circ u)'(a) = g'(u(a)) \cdot u'(a)$$

- Calcule a derivada das funções
  1. $f(x) = 2^x, \quad x \geq 0;$
  2. $g(x) = x^x, \quad x > 0.$
- Prove que

$$\frac{d}{dx}|x| = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \text{Não Existe}, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

[Sugestão:] Tome $|x| = \sqrt{x^2}$, e derive uma função 'composta'.

Dada uma função derivável $u = u(x)$, tem-se

- $[\operatorname{sen} u(x)]' = u'(x) \cdot \cos u(x)$
- $[\operatorname{cosec} u(x)]' = -u'(x) \cdot \operatorname{cosec} u(x) \cdot \operatorname{cotg} u(x)$
- $[\cos u(x)]' = -u'(x) \cdot \operatorname{sen} u(x)$
- $[\sec u(x)]' = u'(x) \cdot \sec u(x) \cdot \operatorname{tg} u(x)$
- $[\operatorname{tg} u(x)]' = u'(x) \cdot \dfrac{1}{\cos^2 u(x)} = u'(x) \cdot \sec^2 u(x)$
- $[\operatorname{cotg} u(x)]' = -u'(x) \cdot \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 u(x)} = -u'(x) \cdot \operatorname{cosec}^2 u(x)$

Teorema (Derivada da função inversa)

Seja $f\colon D \longrightarrow B$, com $D, B \subset \mathbb{R}$, uma função bijectiva.
Se f

- é derivável no ponto $a \in D \cap D'$,
- $f'(a) \neq 0$,
- f^{-1} é contínua em $b = f(a)$,

então f^{-1} é derivável em b, tendo-se

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,.$$

- Recordando que[ii]
  - $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[, \quad f(x) = e^x$ é bijectiva e $f'(x) = e^x \neq 0$;
  - $f^{-1}(y) = \ln y, \quad y \in]0,+\infty[$ é contínua
- Pelo teorema da derivada da função inversa, sendo $y = f(x)$, temos

$$(\ln y)' = \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\ln y)} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

Ou seja

$$(\ln y)' = \frac{1}{y}, \quad y \in]0,+\infty[$$

[ii] A função logaritmo natural é a função inversa da função exponencial de base e.

- $\operatorname{arcsen}'x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad x \in\,]-1,1[\,;$
- $\operatorname{arccosec}'x = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}\,, \quad x \notin\, [-1,1]\,;$
- $\arccos' x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad x \in\,]-1,1[\,;$
- $\operatorname{arcsec}'x = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,, \quad x \notin\, [-1,1]\,;$
- $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,;$
- $\operatorname{arccotg} x = \dfrac{-1}{1+x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$

- Pelo teorema da derivada da função inversa tomando

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \qquad f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} y$$

vem

$$\operatorname{arcsen}' y = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} y)};$$

- Como $\cos z = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 z}$ (porquê?) tem-se

$$\cos(\operatorname{arcsen} y) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} y)} = \sqrt{1 - y^2}.$$

- Assim,

$$\operatorname{arcsen}' y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \qquad \text{para } y \in]-1, 1[.$$

Teorema (Fermat)

Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in D \cap D'$.
Se a é um extremante de f,

então $f'(a) = 0$.

Nota

- O recíproco do Teorema de Fermat é falso, isto é,

$$f'(a) = 0 \not\Longrightarrow \; f(a) \text{ extremo local de } f\,.$$

- Exemplo?

Teorema (Rolle)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em $]a, b[$.
Se $f(a) = f(b)$, então

$$\exists c \in]a, b[: \quad f'(c) = 0 .$$

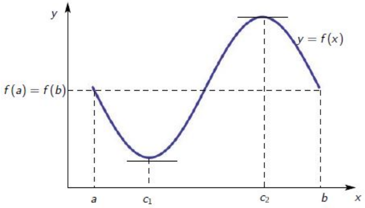


Figura: Interpretação geométrica do Teorema de Rolle

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em $]a, b[$.

1. Entre dois zeros de f existe, pelo menos, um zero de f'.

2. Entre dois zeros consecutivos de f' existe, quando muito, um zero de f.

3. Não há mais do que um zero de f inferior ao menor zero de f', nem mais do que um zero de f superior ao maior zero de f'.

Teorema (Lagrange)

Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que é derivável em $]a, b[$, então

$$\exists c \in\,]a, b[: \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

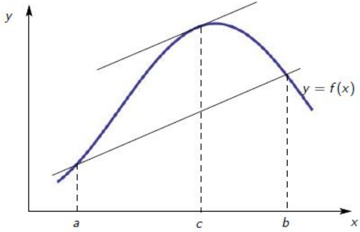


Figura: Interpretação geométrica do Teorema de Lagrange

[Ideia: olhar para f' como o declive de uma reta]

1. Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f'(x) = 0\,,\ \forall x \in]a,b[\,$, então f é constante.

2. Se $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e tais que $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in]a,b[$, então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + C$, $\forall x \in]a,b[$.

3. [Monotonia das funções reais]

   Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo I. Tem-se:

   1. $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, se e só se f é crescente em I
   2. $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$, se e só se f é decrescente em I
   3. se $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente crescente em I
   4. se $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente decrescente em I.

1. $$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

g apresenta uma descontinuidade de salto. g não possui a propriedade do valor intermédio.

Então g não pode ser a derivada de função alguma $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

2. $$h(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Esta função é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$ tendo-se

$$h'(x) = \begin{cases} 2x \cos(\frac{1}{x}) + \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Sejam $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D \cap D'$.

Seja D^1 o subconjunto de D formado por todos os pontos onde f é derivável; isto é D^1 é o domínio de f'.

- Diz-se que f é duas vezes derivável em $a \in D^1$, ponto interior de D^1, se f' for derivável em a.
- Chama-se segunda derivada de f em a à derivada $(f')'(a)$;
- Usam-se, ainda, as notações

$$f''(a), \qquad f^{(2)}(a) \qquad \text{ou} \qquad D^2 f(a)$$

Nota

- De modo análogo define-se a derivada de ordem n de uma função que se denota por
$$f^{(n)} \qquad \text{ou} \qquad D^{(n)}f\,.$$
- Por convenção, considera-se
$$f^{(0)} = f\,.$$

Seja $D \subset \mathbb{R}$, não vazio, tal que $D \subseteq D'$.

- Dado $k \in \mathbb{N}_0$, chama-se conjunto das funções de classe $\mathcal{C}^k$ de D em $\mathbb{R}$ ao conjunto

$$\mathcal{C}^k(D) = \{\, f : D \to \mathbb{R} \;:\; f \text{ é } k \text{ vezes derivável em } D \text{ e } f^{(k)} \text{ é contínua} \,\}$$

- Chama-se conjunto das funções de classe $\mathcal{C}^\infty$ de D em $\mathbb{R}$ ao conjunto

$$\mathcal{C}^\infty(D) = \{\, f : D \to \mathbb{R} \;:\; f \text{ admite derivada de qualquer ordem em } D \,\}$$

EXEMPLO: sabendo que $y^2 = x$, calcular $\dfrac{dy}{dx}$.

1. Sabendo que a equação $y^2 = x$, define duas funções diferenciáveis:

$$y_1 = \sqrt{x} \qquad \text{e} \qquad y_2 = -\sqrt{x},$$

podemos, facilmente, calcular

$$\frac{dy_1}{dx} = ... = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{e} \qquad \frac{dy_2}{dx} = ... = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. Mas suponhamos que a equação $y^2 = x$, definia y como uma ou mais funções diferenciáveis de x (para $x > 0$) e não sabíamos exatamente que funções eram essas.

Poderíamos, mesmo assim, calcular $\dfrac{dy}{dx}$?

A resposta é afirmativa: bastando, para tal, derivar ambos os membros da equação $y^2 = x$, em ordem a x, tratando $y = f(x)$ como uma função f derivável de x:

$$\frac{d}{dx}\left(y^2\right) = \frac{d}{dx}(x) \iff \cdots \iff \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

Calcular $\frac{dy}{dx}$.

1. Derivar ambos os membros da equação, em ordem à variável independente x; tratando a outra variável, y, como dependente de uma função derivável ($y = f(x)$, com f derivável)
2. Resolver a equação em ordem a $\frac{dy}{dx}$.

EXERCÍCIO: Calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$, sabendo que $2x^3 - 3y^2 = 8$..