Cálculo Integral em $\mathbb{R}$

Cálculo para Engenharia

MARIA ELFRIDA RALHA

Departamento de Matemática
(Universidade do Minho)

Licenciatura em Engenharia Informática

Índice

- Dada uma função derivável

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida num intervalo I, sabemos determinar uma função

$$g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\boxed{g(x) = f'(x), \quad \forall x \in I}$$

Problema

- **Conhecida** uma função f (real de uma varivel real) definida num intervalo I, **encontrar** uma função $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável e tal que

$$\boxed{F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I}$$

Este problema é o da

primitivação/(antiderivação) da função f no intervalo I.

- [Função primitiva] A função $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$, definida no intervalo I, é uma função primitiva de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ quando, para qualquer $x \in I$, F é derivável e

$$F'(x) = f(x)$$

- Nestas condições, dizemos também que
  - f é primitivável em I
  - F é uma (função) primitiva ou antiderivada de f em I
  - O conjunto de todas as primitivas de f é o **Integral Indefinido** de f e escrevemos

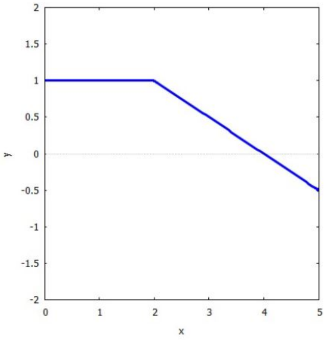
$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

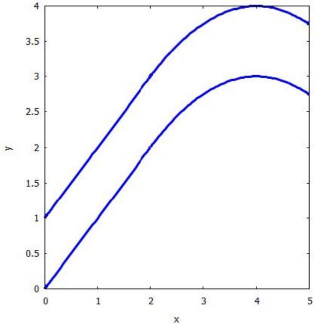
Nota

F *é* **uma** *primitiva de* f *sse* f *é* **a** *derivada de* F

EXEMPLO:

1. Esboço gráfico de f e de duas possíveis funções primitivas F:





Teorema

Se, no intervalo I, f e F são uma função e uma sua primitiva (respetivamente), então

$$\frac{d}{dx}F(x) = \left(\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right]\right) = f(x)$$

Se derivarmos uma primitiva de f obtemos, novamente, f.

Teorema

Se, no intervalo I, F_1 e F_2 são duas funções primitivas de f, então a diferença $F_1 - F_2$ é uma função constante.
Se F é uma primitiva de f no intervalo I então qualquer função definida por

$$F(x) + \mathcal{C}, \quad \forall x \in I$$

e com $\mathcal{C}$ uma constante real arbitrária, também é uma função primitiva de f.

Basta notar que $[F(x) + \mathcal{C}]' = F'(x) = f(x), \ \forall x \in I$

1. A função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$F(x) = x^2$$
é uma primitiva da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2x$

2. A função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
$$F(x) = x^2 + \sqrt{3}$$
também é uma primitiva da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2x$.

$\therefore$ O integral indefinido $\displaystyle\int 2x\, dx = x^2 + \mathcal{C}$ é a família das funções primitivas de f, onde $\mathcal{C}$ é uma constante (real) arbitrária.

Mas

nem todas as funções admitem primitiva!

Por exemplo,

3. a função definida por
$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{se } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$
não admite primitiva no intervalo $[0, 4]$ porque não é a derivada de alguma função.

Função f	Derivada de f : $\dfrac{df}{dx}$
e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
x^k	$k\, x^{k-1}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$

com $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(tabeladas)

Função f	Primitivas: $\int f(x)\,dx$
e^x	$e^x + \mathcal{C}$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + \mathcal{C}$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x + \mathcal{C}$
x^k	$\dfrac{x^{k+1}}{k+1} + \mathcal{C}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + \mathcal{C}$

com $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Nota (Sugestão)

- **Comparem-se** as correspondentes linhas, n**as duas tabelas**: a das derivadas com a correspondente das primitivas e assinalem-se, justificando, as diferenças...

1. $\displaystyle\int 1\,dx = x + \mathcal{C}$ porque $\displaystyle\frac{d}{dx}(x+\mathcal{C}) = (x+\mathcal{C})' = \dots$
2. $\displaystyle\int x\,dx$
3. $\displaystyle\int x^3\,dx$
4. $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx$
5. $\displaystyle\int e^x\,dx$
6. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx$

Recorde-se:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

- [Primitivação "por decomposição"]

Teorema

Se $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ (constante); então

1. $$\int [\alpha\, f(x)]\; dx = \alpha \int f(x)\, dx\, dx$$

2. $$\int [f(x) \pm g(x)]\; dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

porque...

Complete

1. $$\int \left(3x^2 - 2x^5\right)\, dx = \ldots$$

2. $$\int \left(\sqrt{x} + 1\right)^2\, dx = \int \left(x + 2\sqrt{x} + 1\right)\, dx = \ldots$$

3. $$\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} + \cos 2x\right)\, dx = \ldots$$

- Procurar uma primitiva de uma função f é, afinal, resolver a equação (dita 'diferencial')

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

em ordem a y, sendo que tanto f como y são funções de x.

- A função y é uma primitiva de f. E se especificarmos uma condição inicial,

$$y(x_0) = y_0$$

fixamos uma constante arbitrária $\mathcal{C}$.

Nota

A combinação de uma equação diferencial e uma condição inicial, diz-se um **problema de valor inicial***.*

Exercício: Resolva a equação diferencial $\dfrac{dv}{dt} = -9.8$, com $v(0) = 3.6$.

- [Primitivação "imediata"]

Nota

- Recorde-se o resultado sobre a derivada da função compost:a

$$[g(f(x))]' = g'[f(x)] \times f'(x)$$

Teorema

Se as funções $f : I \longrightarrow J$ e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ são deriváveis e tais que a função composta, $g \circ f$, também está definida, então

$$\int [g'(f(x)) \; \times \; f'(x)] \, dx = g[f(x)] + \mathcal{C}$$

Determine

1. $\displaystyle\int (2x+10)^{20}\,dx$
2. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\,dx$
3. $\displaystyle\int x^4(x^5+10)^9\,dx$
4. $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$

A regra da cadeia, 'invertida'

1. a 'regra da cadeia' permite-nos concluir que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{k+1}}{k+1}\right) = u^k \, \frac{du}{dx}$$

2. Por outro lado, a mesma equação também pode ser lida como afirmando que

$$\int u^k \, \frac{du}{dx} \, dx = \left(\frac{u^{k+1}}{k+1}\right) + \mathcal{C}$$

3. que é equivalente a uma forma mais 'simples'

$$\int u^k \, du = \frac{u^{k+1}}{k+1} + \mathcal{C}$$

Nota

Leibniz, um dos fundadores do 'Cálculo', percebeu que se podia fazer a 'substituição' (muito útil no cálculo de integrais)

$$du = \frac{du}{dx} \, dx$$

- [Primitivação "por substituição"]:[i]

Teorema

Se a função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é primitivável –isto é $F(x) = \int f(x)\,dx$ existe– e φ é uma função derivável e invertível no intervalo J, com $\varphi(J) \subset I$, então fazendo (encontrando) $x = \varphi(t)$ tem-se

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

Nota

- Recorde-se que a função f, que se pretende primitivar, é uma função de x pelo que a variável t será substituída –depois da integração do 2º membro– pela sua expressão resultante de

$$t = \varphi^{-1}(x)$$

[i] é uma consequência direta da primitivação "imediata" (isto é, da derivada da função composta).

1. $\displaystyle\int (x^3+x)^5(3x^2+1)\,dx$ Faça-se $t = x^3 + x$.

2. $\displaystyle\int 3x^2 e^{x^3}\,dx$, com $\left[\begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2\,dx \end{array}\right]$ tem-se

   $$\int 3x^2 e^{x^3}\,dx = \int e^t\,dt = e^t + \mathcal{C} = e^{x^3} + \mathcal{C}$$

3. $\displaystyle\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\,\cos x\,dx$ Use-se $t = \operatorname{sen} x$.

4. $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$ Use-se $t = \ln x$.

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx$, com $\left[\begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \end{array}\right]$ tem-se...

- [Primitivação por partes]

  Considerem-se as funções $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deriváveis.
  Então, (a partir da derivada do produto de duas funções, podemos concluir que)

$$\int [f'(x) \times g(x)]\, dx = f(x) \times g(x) - \int [f(x) \times g'(x)]\, dx$$

Nota

Uma vez que o produto de funções é comutativo, na primitivação por partes ESCOLHE-SE

- para f' a função adequada (por exemplo: da qual se conhece a primitiva)
- para g a função adequada (por exemplo: a que, por derivação, simplifica a expressão)

1. $$\int (x \cos x) \, dx$$
2. $$\int (e^x \cos x) \, dx$$
3. $$\int \cos^2 x \, dx$$
4. $$\int \ln x \, dx$$

As funções racionais $-f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}, \ldots -$ são uma classe de funções cujas primitivas se podem exprimir em termos de funções elementares.

Teorema

Fundamental da Álgebra (sobre os números reais):
Qualquer polinómio (de coeficientes reais) de grau ≥ 1 é fatorizável na forma de um produto de uma constante por fatores lineares de tipo $(x - a)$ e por fatores quadráticos irredutíveis do tipo $(x^2 + bx + c)$.

Exercício : Considerem-se os seguintes polinómios: $p_1(x) = x + 1$, $p_2(x) = x^2 + 1$, $p_3(x) = x^3 + 1$ e $p_4(x) = x^4 + 1$.

De que grau são? Quantos e quais zeros tem? Qual a decomposição assegurada pelo teorema anterior?

com $i = 1, ..., 4$