Cálculo Integral em $\mathbb{R}$

Cálculo para Engenharia

Maria Elfrida Ralha

Departamento de Matemática
(Universidade do Minho)

Licenciatura em Engenharia Informática

Parte I

Integral Indefinido (conclusão)

As funções racionais $-f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$,...– são uma classe de funções cujas primitivas se podem exprimir em termos de funções elementares.

Teorema

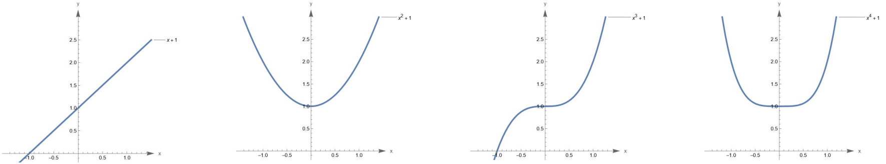
Fundamental da Álgebra (sobre os números reais):
Qualquer polinómio (de coeficientes reais) de grau ≥ 1 é fatorizável na forma de um produto de uma constante por fatores lineares de tipo $(x-a)$ e por fatores quadráticos irredutíveis do tipo (x^2+bx+c).

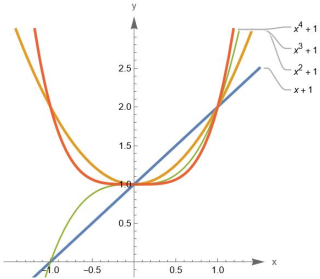
Exercício : Considerem-se os seguintes polinómios: $p_1(x) = x+1$, $p_2(x) = x^2+1$, $p_3(x) = x^3+1$ e $p_4(x) = x^4+1$.

De que grau são? Quantos e quais zeros tem? Qual a decomposição assegurada pelo teorema anterior?

Representação Gráfica de $p_i(x)$,

com $i = 1, \dots, 4$





Nota

- *A primitivação das funções racionais*

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}\,, \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} :\ D(x) \neq 0\}\,,$$

onde N e D são dois polinómios, reduz-se à primitivação de

  - *polinómios* *e/ou*
  - *frações (parciais) simples*

A determinação de $\displaystyle\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$, onde N, D são polinómios e $D \neq 0$, divide-se nas seguintes etapas:

1. Usar uma *fracção própria*; se necessário, recorrer à divisão de polinómios para escrever

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

2. Calcular os zeros de D e –usando o Teorema Fundamental da Álgebra– decompor D em fatores irredutíveis
3. Decompor a fração $\frac{R(x)}{D(x)}$ em frações simples
4. Determinar as primitivas das frações simples
5. Adicionar a primitiva de Q e as primitivas das frações simples

- Considerem-se os seguintes casos,

  com $A, B, \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

  - Caso 1: $\displaystyle\int \frac{A}{x-\alpha}\, dx = \ln|x-\alpha| + \mathcal{C}$
  - Caso 2: $\displaystyle\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}\, dx = A\frac{(x-\alpha)^{(-n+1)}}{-n+1} + \mathcal{C}$
  - Caso 3: $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta}\, dx = \int \frac{Ax}{(x-\alpha)^2+\beta}\, dx + \int \frac{B}{(x-\alpha)^2+\beta}\, dx$
  - Caso 4: $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta]^n}\, dx$

Caso 3_i: $\dfrac{1}{(x-\alpha)^2+\beta}$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$

$$[\operatorname{arctg} u(x)]' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta}dx = \int \frac{1}{\beta\left[\left(\frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)^2+1\right]}dx$$

$$= \frac{\sqrt{\beta}}{\beta}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{\beta}}}{\left(\frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\beta}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)+\mathcal{C}, \quad \mathcal{C}\in\mathbb{R}.$$

$$\int \frac{3x}{x-2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx$$

$$\int \frac{4}{(x-2)^5}\,dx$$

$$\int \frac{3x+5}{x^3+1}\,dx$$

$$\int \frac{4}{(x-2)^5(x+1)}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$$

$$\int \frac{7x-1}{(x^2+1)(x+2)^2(x^2+4x+5)^2}\,dx$$

Parte II

Integral Definido

Integral de Riemann

Nota

A base da formulação dos **integrais definidos** *é a construção de aproximações, a partir de somas finitas.* *Exemplos:: Áreas, Distâncias e Valores Médios,...*

Sendo $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, real de variável real, definida em um intervalo fechado e limitado, veremos o que se entende por

- f é integrável (segundo Riemann) em $[a, b]$?

  E, nesse caso,

- como se define o número (real) representado por $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$?

- Integrando f sobre um intervalo $[a, x]$ onde se varia o extremo direito deste intervalo, obtem-se outra função de x.

- O resultado mais importante da integração, denominado **TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO**, atesta que a integração e a diferenciação são operações recíprocas.

Seja $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada.

- Consideramos uma partição, $\mathcal{P}$, do intervalo $[a,b]$, isto é, subdividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos que não se sobrepõem e que reunidos são $[a,b]$.
  Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ os extremos desses subintervalos, com

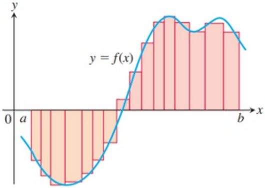
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

- Chamamos soma(s) de Riemann de f no intervalo $[a,b]$, para a partição $\mathcal{P}$, a

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{x_k})\,(x_{k+1} - x_k), \qquad \text{onde} \quad \widetilde{x_k} \in [x_k, x_{k+1}]$$

ou

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{x_k})\,\Delta\, x_{k+1}, \qquad \text{com} \quad \Delta\, x_{k+1} = x_{k+1} - x_k$$



- **[Integral definido]** O integral definido de f em $[a, b]$ é o limite da(s) soma(s) de Riemann de f, quando $n \longrightarrow \infty$, isto é

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{x_k})\, \Delta\, x_{k+1}$$

  - O integral definido de f em $[a, b]$ representa-se por

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\, dx$$

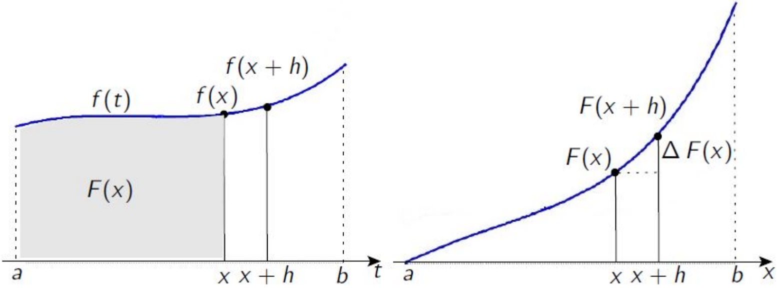
  - A função f diz-se integrável no intervalo $[a, b]$ (segundo Riemann).
  - Observe-se que: $n \longrightarrow \infty$ equivale a $\Delta\, x_{k+1} \longrightarrow 0$.

Índice

- Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e, por simplicidade, assuma-se $f \geq 0$.
- Considere-se a área limitada pelo gráfico de f e o eixo das abcissas entre $t = a$ e $t = x$ $(x \leq b)$: para cada x o valor da área será dado por uma "função área" F

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Nota: Esta "função área" pode definir-se, mesmo sem estar garantida a continuidade de f.



- Tem-se

$$f(x)\, h \leq \Delta F(x) \leq f(x+h)\, h$$

Justifique!

- Ou, dividindo a expressão anterior por h,

$$f(x) \leq \frac{\Delta F(x)}{h} \leq f(x+h)$$

- Tomando o limite quando $h \longrightarrow 0$ nas desigualdades anteriores tem-se

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x)$$

e

$$\lim_{h \longrightarrow 0} f(x+h) = f(x)$$

- Então

$$f(x) \leq F'(x) \leq f(x)$$

isto é, a "função área"

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

é derivável, tendo-se que $\forall x \in [a, b], F'(x) = f(x)$ o que equivale a dizer-se que **a "função área" é uma primitiva da função** f.

Teorema (Fundamental do Cálculo)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

1) *A função $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

é derivável em $[a, b]$, tendo-se

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

2) *Fórmula de Barrow:* *Sendo F uma primitiva de f em $[a, b]$, tem-se*

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(t)\Big|_a^b \stackrel{def.}{=} F(b) - F(a).}$$

- Qualquer função contínua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é primitivável em $[a, b]$
  MAS, atenção,
  f pode não ser contínua (e, por conseguinte, não primitivável) e, mesmo assim, ser integrável, em $[a, b]$

- A "função área", F, pode até não ser derivável ou, mesmo sendo derivável, pode ser tal que a sua derivada não coincide com f nos pontos de descontinuidade de f.

1. Para $f(x) = 1$, com $x \in [0, 2]$ tem-se $F(x) = \dots$

2. Para $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 2\right] \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = \frac{1}{2} \end{cases}$ $F(x) = \dots$

1. Para $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1[\\ 1 & \text{se } x \in [1,2] \end{cases} \qquad F(x) = \ldots$

2. Para $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1[\\ x-1 & \text{se } x \in]1,2] \end{cases} \qquad F(x) = \ldots$

3. Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$

4. Sabendo que $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in [0,1[\\ 4 & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$ calcule $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$

Sejam $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, F uma sua primitiva e $\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ derivável.

- Então f é integrável, em particular, entre a e $\varphi(x)$, tendo-se

$$\int_a^{\varphi(x)} f(t)\, dt = F(\varphi(x)) - F(a)$$

- Pelo teorema da derivação da função composta tem-se, então

$$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\, dt\right)' = [F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\, \varphi'(x)\,.$$

- Por 1) do teorema fundamental do cálculo $F' = f$, pelo que se conclui que

$$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\, dt\right)' = f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\,.$$

Sendo $\varphi, \psi \colon [c, d] \longrightarrow [a, b]$ funções deriváveis, tem-se

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt \right)' = f(\psi(x))\, \psi'(x) - f(\varphi(x))\, \varphi'(x)$$

Basta notar que

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt = \int_{a}^{\psi(x)} f(t)\, dt - \int_{a}^{\varphi(x)} f(t)\, dt = F(\psi(x)) - F(\varphi(x))$$

e conjugar o teorema fundamental do cálculo com o teorema da derivação de funções compostas.

1. Calcule $F'(x)$ quando $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$

2. Calcule $G'(x)$ quando $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{1}{1+t}\,dt$.

3. Defina f sabendo que $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+, \quad \int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^3 e^x - x^4$$