Cálculo Integral em $\mathbb{R}$

Cálculo para Engenharia

Maria Elfrida Ralha

Departamento de Matemática
(Universidade do Minho)

Licenciatura em Engenharia Informática

Seja $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada.

- Consideramos uma partição, $\mathcal{P}$, do intervalo $[a,b]$, isto é, subdividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos que não se sobrepõem e que reunidos são $[a,b]$.
  Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ os extremos desses subintervalos, com

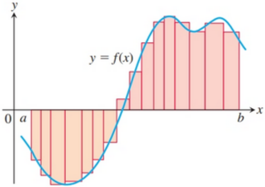
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

- Chamamos soma(s) de Riemann de f no intervalo $[a,b]$, para a partição $\mathcal{P}$, a

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{x}_k)\,(x_{k+1} - x_k), \qquad \text{onde} \quad \widetilde{x}_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

ou

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{x}_k)\,\Delta\, x_{k+1}, \qquad \text{com} \quad \Delta\, x_{k+1} = x_{k+1} - x_k$$



- **[Integral definido]** O integral definido de f em $[a, b]$ é o limite da(s) soma(s) de Riemann de f, quando $n \longrightarrow \infty$, isto é

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{x_k})\, \Delta\, x_{k+1}$$

  - O integral definido de f em $[a, b]$ representa-se por

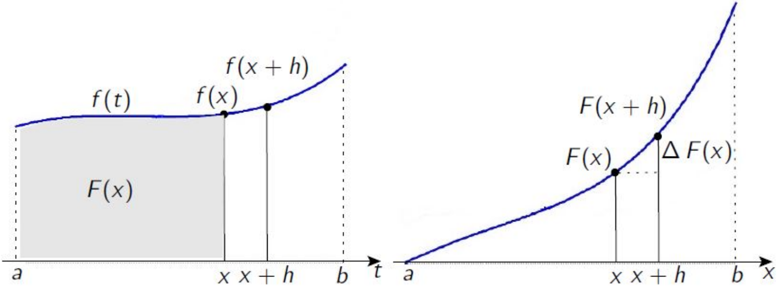
$$\int_{x=a}^{b} f(x)\, dx$$

  - A função f diz-se integrável no intervalo $[a, b]$ (segundo Riemann).
  - Observe-se que: $n \longrightarrow \infty$ equivale a $\Delta\, x_{k+1} \longrightarrow 0$.

- Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e, por simplicidade, assuma-se $f \geq 0$.
- Considere-se a área limitada pelo gráfico de f e o eixo das abcissas entre $t = a$ e $t = x\,(x \leq b)$: para cada x o valor da área será dado por uma "função área" F

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Nota: Esta "função área" pode definir-se, mesmo sem estar garantida a continuidade de f.



- Tem-se

$$f(x)\,h \leq \Delta F(x) \leq f(x+h)\,h$$

Justifique!

- Ou, dividindo a expressão anterior por h,

$$f(x) \leq \frac{\Delta F(x)}{h} \leq f(x+h)$$

- Tomando o limite quando $h \longrightarrow 0$ nas desigualdades anteriores tem-se

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x)$$

e

$$\lim_{h \longrightarrow 0} f(x+h) = f(x)$$

- Então

$$f(x) \leq F'(x) \leq f(x)$$

isto é, a "função área"

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

é derivável, tendo-se que $\forall x \in [a, b], F'(x) = f(x)$ o que equivale a dizer-se que **a "função área" é uma primitiva da função** f.

Teorema (Fundamental do Cálculo)

Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

1) *A função $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

é derivável em $[a,b]$, tendo-se

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

2) *Fórmula de Barrow:* *Sendo F uma primitiva de f em $[a,b]$, tem-se*

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(t)\Big|_a^b \overset{def.}{=} F(b) - F(a).}$$

Sejam $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, F uma sua primitiva e $\varphi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ derivável.

- Então f é integrável, em particular, entre a e $\varphi(x)$, tendo-se

$$\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = F(\varphi(x)) - F(a)$$

- Pelo teorema da derivação da função composta tem-se, então

$$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt\right)' = [F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,.$$

- Por 1) do teorema fundamental do cálculo $F' = f$, pelo que se conclui que

$$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt\right)' = f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,.$$

Sendo $\varphi, \psi \colon [c, d] \longrightarrow [a, b]$ funções deriváveis, tem-se

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt \right)' = f(\psi(x))\, \psi'(x) - f(\varphi(x))\, \varphi'(x)$$

Basta notar que

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt = \int_{a}^{\psi(x)} f(t)\, dt - \int_{a}^{\varphi(x)} f(t)\, dt = F(\psi(x)) - F(\varphi(x))$$

e conjugar o teorema fundamental do cálculo com o teorema da derivação de funções compostas.

1. Calcule $F'(x)$ quando $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$
2. Calcule $G'(x)$ quando $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{1}{1+t}\,dt$.
3. Defina f sabendo que $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+, \quad \int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^3 e^x - x^4$$

- Integração por decomposição
- Integração imediata
- Integração por partes
- Integração por substituição

Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes. Então

$$\boxed{\int_a^b [\alpha\, f(x) \pm \beta\, g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx \pm \beta \int_a^b g(x)\, dx.}$$

- [cf. ALGA] O integral definido é um operador linear.

1. Calcule

$$\int_0^{\pi} \left[\sqrt{2}\, x^2 + 2 \operatorname{sen} x\right] dx.$$

Sejam funções $f : I \longrightarrow J$ e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções deriváveis tais que a função composta está bem definida. Então

$$\int_a^b g'(f(x)) \cdot f'(x)\, dx = \int_a^b [g(f(x))]'\, dx = g(f(b)) - g(f(a)).$$

1. Calcule

$$\int_{\pi/4}^{\pi} \cos x\, (\operatorname{sen} x)^3\, dx.$$

Sejam funções $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe $\mathcal{C}^1$. Então

$$\boxed{\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \Big[f(x)\, g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx.}$$

1. Calcule

$$\int_0^{\pi} x \cos x \, dx.$$

Sejam $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, I um intervalo, $f : I \longrightarrow [a, b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ e $\alpha, \beta \in I$ tais que

$$f(\alpha) = a \qquad \text{e} \qquad f(\beta) = b.$$

Então

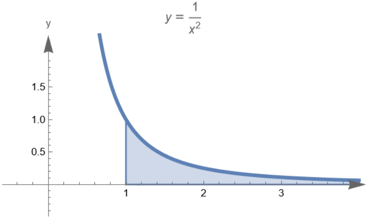
$$\boxed{\int_a^b g(x)\, dx = \int_\alpha^\beta g(f(t))\, f'(t)\, dt.}$$

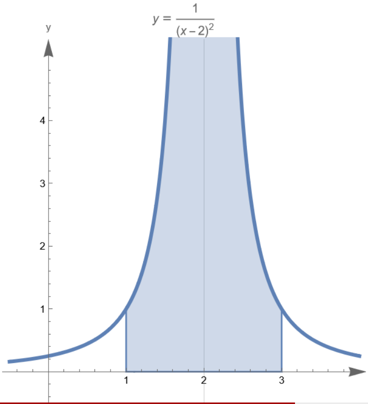
- O método de integração por substituição também se denomina método de integração por mudança de variáveis.

1. Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{arcsen} x\, dx$, considerando a seguinte mudança de variáveis:

$$x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1] \qquad \text{definida por} \qquad x(t) = \operatorname{sen} t.$$

- Qual a área delimitada pela curva definida por $y = \dfrac{1}{x^2}$, quando $x \geq 1$?





- Qual a área delimitada pela curva definida por $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$, quando $1 \leq x \leq 3$?

- [Tipo 1] Integrais em intervalos ilimitados: sendo $a, b \in \mathbb{R}$

$$]-\infty, a] \qquad \text{ou} \qquad [b, +\infty[\qquad \text{ou} \qquad]-\infty, +\infty[$$

- [Tipo 2] Integrais de funções ilimitadas em algum ponto do intervalo de integração. Por exemplo.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx.$$

- [Tipo 3] Integrais em intervalos ilimitados & de funções ilimitadas em algum ponto do intervalo de integração.

- Seja f definida em $[a,+\infty[$ e integrável em qualquer intervalo $[a,b]$ com $[a,b] \subset [a,+\infty[$.
  Define-se o integral impróprio de f em $[a,+\infty[$ por

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

  - Se o limite não existir, diz-se que o integral impróprio é divergente.
  - Se o limite existir, diz-se que o integral impróprio é convergente e/ou que f é integrável em sentido impróprio.

- Seja f definida em $]-\infty, b]$ e integrável em qualquer intervalo $[a, b]$ com $[a, b] \subset]-\infty, b]$.

  Define-se o integral impróprio de f em $]-\infty, b]$ por

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

  - Se o limite não existir, diz-se que o integral impróprio é divergente.
  - Se o limite existir (for finito), diz-se que o integral impróprio é convergente e/ou que f é integrável em sentido impróprio.

- Seja f definida em $\mathbb{R}$ e integrável em em qualquer intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Define-se o integral impróprio de f em $\mathbb{R}$ por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\, dx$$

  com $c \in \mathbb{R}$ arbitrário, desde que os integrais do 2.º membro sejam convergentes.

- É divergente o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx.$$

De facto,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \Big[\ln x\Big]_1^t = \lim_{t\to+\infty} (\ln t - \ln 1) = +\infty.$$

- É convergente o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx.$$

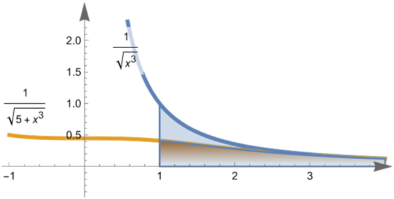
De facto,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^t = \lim_{t\to+\infty} (-\frac{1}{t} + 1) = 1.$$

Nota (Critério de Comparação)

- *Se* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *e* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *converge,* *então* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *também converge.*
- *Se* $0 \leq g(x) \leq f(x)$ *e* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *diverge,* *então* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *também diverge.*

EXEMPLO:



Nota: Existem resultados análogos para os integrais impróprios $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$.

- Os seguintes integrais são úteis na aplicação do critério de comparação:

  - $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\, dx \quad \begin{cases} \text{converge,} & \text{quando} \quad r > 1 \\ \text{diverge,} & \text{quando} \quad r \leq 1. \end{cases}$$

  - $$\int_0^{+\infty} e^{-r\,x}\, dx \quad \begin{cases} \text{converge,} & \text{quando} \quad r > 0 \\ \text{diverge,} & \text{quando} \quad r \leq 0. \end{cases}$$

- Seja $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[a, c]$ com $[a, c] \subset [a, b[$ e ilimitada quando $x \to b$. Define-se o integral impróprio de f em $[a, b[$ por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

- Seja $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[c, b]$ com $[c, b] \subset]a, b]$ ilimitada quando $x \to a$. Define-se o integral impróprio de f em $]a, b]$ por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

  - Se o limite não existir, diz-se que o integral impróprio é divergente.
  - Se o limite existir (for finito), diz-se que o integral impróprio é convergente.

Exemplo

- Determine, se possível, o valor de

$$\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx.$$

- A função integranda está definida em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Assim, há que escrever

$$\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx$$

e estudar separadamente cada um dos integrais impróprios do tipo 2.

- Mas

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \left[-\frac{1}{1-x}\Big|_{x=0}^{t} = \lim_{t\to 1^-} \left[-1 + \frac{1}{1-t} \right]\right.$$

Como o limite não existe, este integral é divergente.

- Uma vez que um dos integrais do 2.º membro é divergente, o integral dado é divergente.

- Para os integrais impróprios mantêm-se válidas as propriedades de linearidade e aditividade.

- Para os integrais do tipo 2 tem lugar um "Critério de comparação" análogo ao critério para integrais do tipo 1.

- Dizem-se integrais impróprios do tipo 3 os integrais que são simultaneamente do tipo 1 e do tipo 2.

Exercício: É do tipo 3 o integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x}\, dx. \qquad \text{Porquê?}$$

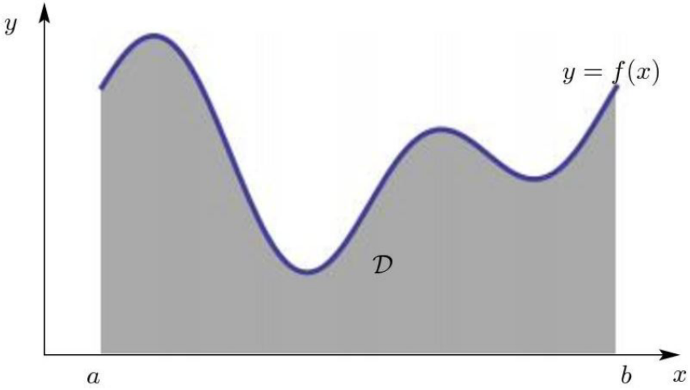
- Cálculo de áreas de domínios planos

- Cálculo de comprimento de curvas

- Cálculo de Distâncias, Limites, Valores Médios, Volumes de sólidos de revolução

- Se f é contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a, b]$ então a área da região sob o gráfico de f entre $x = a$ e $x = b$ é

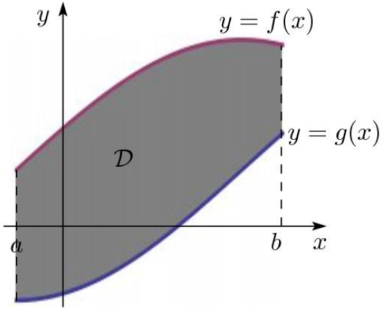
$$\text{área de } \mathcal{D} = \int_{x=a}^{b} f(x)\, dx$$



Em geral,

- Se f e g são contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo o $x \in [a, b]$ então a área da região limitada pelos gráfico de f e g entre a e b é

$$\text{área} = \int_{x=a}^{b} [\, f(x) - g(x) \,] \, dx.$$



- Calcular a medida da área da região delimitada pelos gráficos das funções seno e cosseno para x entre 0 e $\dfrac{\pi}{4}$.