Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Cálculo

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 2 A :: 11 de janeiro de 2021

Nome: Proposta de correção Número:

I

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas.

Questão 1. [3 valores] Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) + 1, & \text{se } x < 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x+1} + 2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

Determine o conjunto dos pontos onde f é derivável, indicando o valor da derivada nesses pontos.

f é derivável em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$, por ser obtida por composição, quociente e soma de funções deriváveis.

$f'(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\cos(\pi x) + 1 - 2}{x} = \frac{0}{0}$

(aplicando a Regra de l'Hôpital) $= \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-\pi \operatorname{sen}(\pi x)}{1} = 0$

$f'(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{\ln(x+1)}{x+1} + 2 - 2}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x^2 + x} = \frac{0}{0}$

(aplicando a Regra de l'Hôpital) $= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{2x+1} = 1$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, f não é derivável em $x = 0$. Então

- se $x > 0$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \cdot (x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$
- se $x = 0$, $f'(0)$ não existe
- se $x < 0$, $f'(x) = -\pi \operatorname{sen}(\pi x)$

Questão 2. [2 valores] Considere função $f(x) = x^2 - e^{x^2} + 1$.

a) Verifique que $f(0) = 0$.

b) Mostre que a função f não tem mais zeros.

a) $f(0) = 0 - e^0 + 1 = 0$

b) $f'(x) = 2x - 2xe^{x^2} = 2x(1 - e^{x^2}) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Como $1 - e^{x^2} < 0$, para todo o $x \neq 0$, então

- $\forall x \in]-\infty, 0[\quad f'(x) < 0$
  e f é estritamente decrescente neste intervalo
- $\forall x \in]0, +\infty[\quad f'(x) > 0$
  e f é estritamente crescente neste intervalo.

Então

$\forall x \in \mathbb{R}^- \quad f(x) < f(0) = 0 \quad$ e $\quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 = f(0) < f(x)$

Questão 3. [2,5 valores] Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}}{2x}$$ (por aplicação da Regra de l'Hôpital, indeterminação $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \operatorname{sen} x\, e^{\operatorname{sen} x} - \cos^2 x\, e^{\operatorname{sen} x}}{2}$$ (aplicação da Regra de l'Hôpital a indeterminação $\frac{0}{0}$)

$= 0$

Questão 4. [4 valores] Calcule os seguintes integrais:

a) $\int \frac{1+\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$; b) $\int_1^e x^3 \ln x\,dx$.

a) $$\int \frac{1+\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{1}{1+x^2} \operatorname{arctg} x\,dx$$

$$= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C,\ C \in \mathbb{R}$$

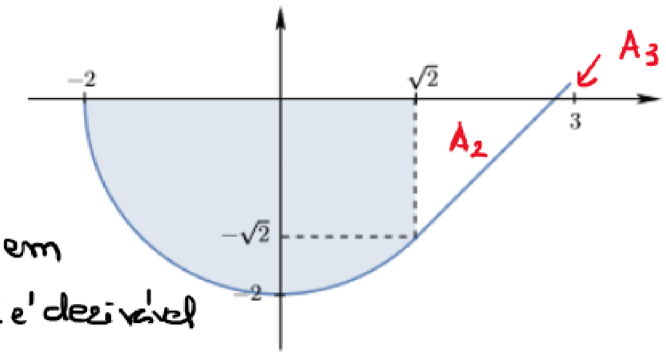
b) $$\int_1^e x^3 \ln x\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{4}x^3 = \left(\frac{e^4}{4}\ln e - \frac{1}{4}\ln 1\right) - \left[\frac{1}{16}x^4\right]_1^e$$

$u' = x^3 \quad u = x^4/4$

$v = \ln x \quad v' = 1/x$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3e^4+1}{16}$$

Questão 5. [3,5 valores] Considere a função $f : [-2,3] \to \mathbb{R}$ cujo gráfico se representa abaixo. O gráfico é constituído por um arco de circunferência centrada na origem e um segmento de reta que se unem no ponto $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, onde f é derivável.



a) Indique o conjunto dos pontos onde f é derivável.

$f(x) = -(4-x^2)^{1/2}$ se $x \in [-2, \sqrt{2}]$

$$f'(-2) = \lim_{x\to -2^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{-(2-x)^{1/2}(2+x)^{1/2}}{2+x}$$

$$= \lim_{x\to -2^+} \frac{-(2-x)^{1/2}}{(2+x)^{1/2}} = -\infty.$$ Então f não tem derivada em $x=-2$. Nos restantes pontos f é derivável

b) Indique os pontos onde a derivada de f se anula.

O único ponto onde f' se anula é $x=0$

c) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Para $x \in]-2, \sqrt{2}]$, $f'(x) = -\frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Então o declive da reta tangente ao gráfico de f em $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ é $f'(\sqrt{2}) = 1$. e a sua equação é $(y+\sqrt{2}) = (x-\sqrt{2})$ ou, equivalentemente, $y = x - 2\sqrt{2}$

d) Sabendo que o valor da área da região sombreada na figura é $\frac{3\pi}{2}+1$, determine o valor de $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$.
(Caso necessite e não saiba calcular $f(3)$, pode usar $f(3)=\frac{1}{5}$.)

• $x>0$ e $f(x)=0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$

Área $(A_1) = \frac{1}{2}(2\sqrt{2}-\sqrt{2})\sqrt{2} = 1$

$f(3) = 3-2\sqrt{2}$

Área $(A_2) = \frac{1}{2}(3-2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = \frac{9-8\sqrt{2}+8}{2} = \frac{17-8\sqrt{2}}{2}$

$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = -(\text{área região sombreada}) - \text{área}(A_1) + \text{área}(A_2)$

$= -\frac{3\pi}{2} - 1 - 1 + \frac{17-8\sqrt{2}}{2} = \frac{-3\pi+13-8\sqrt{2}}{2}$

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira.
Não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Seja $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(-1)=f(1)=-1$ e $f(\frac{1}{2})=0$. Então:

- ○ f' nunca se anula;
- ● f' tem pelo menos um zero;
- ○ f' tem um zero à esquerda de $\frac{1}{2}$ e outro à sua direita;
- ○ f é crescente em $]-1,0[$ e decrescente em $]0,1[$.

Questão 2. Seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma função derivável cuja derivada nunca se anula. Então:

- ○ f não tem mínimo nem máximo;
- ● f é monótona;
- ○ $f(x)\neq 0,\ \forall x\in[0,1]$;
- ○ f' é derivável.

Questão 3. Seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma função contínua não negativa e seja F uma sua primitiva. Então F:

- ○ é não negativa;
- ● é crescente;
- ○ admite pelo menos um ponto de descontinuidade;
- ○ verifica a desigualdade $F(x)\geq f(x)$, para todo o $x\in[0,1]$.

Questão 4. O integral $\int \frac{8\,dx}{x(x^2-4)\cancel{dx}}$ é igual a:

- ○ $\int \frac{8}{x}\,dx \int \frac{1}{x^2-4}\,dx$;
- ● $\int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{2}{x}\,dx$;
- ○ $\int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx$;
- ○ nenhuma das anteriores.

Questão 5. Seja $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,2]\setminus\{1\}\\ 1, & x=1\end{cases}$. Então:

- ○ existe uma partição P do intervalo $[0,2]$ tal que $S(f,P)=0$;
- ● qualquer que seja a partição P do intervalo $[0,2]$, $s(f,P)=0$;
- ○ $\underline{\int_0^2} f(x)\,dx < \overline{\int_0^2} f(x)\,dx$;
- ○ $\int_0^2 f(x)\,dx > 0$.