LEInf

Universidade do Minho — 17/novembro/2021

Dep. de Matemática — [Duração 1h30]

Cálculo para Engenharia – Teste 1 – Proposta de resolução

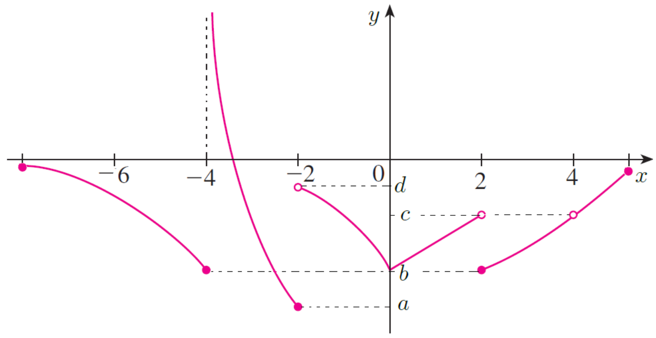
Nome completo::	Número::

Grupo I
(12 valores)
Justifique convenientemente todas as suas respostas

1. (4 valores)

Considere a função $f:\ D \longrightarrow E$, onde $D \subset [-8,5]$, e cujo gráfico está representado na figura.

(a) Indique o domínio D e contradomínio E de f.



(b) A função f é injetiva? E sobrejetiva?

(c) Indique o conjunto de pontos de acumulação do domínio de f.

(d) O que pode dizer sobre $\lim\limits_{x\to\beta} f(x)$ quando $\beta = -4^+$ e $\beta = 4$?

(e) Indique, se existirem, os pontos de descontinuidade de f.

(f) Indique uma restrição de f que seja invertível e esboce uma sua representação gráfica.

2. (2 valores)

Calcule, se existir, $\lim_{x \longrightarrow 1} \sqrt{|x-1|}$.

3. (3 valores)

Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{x^2+1}, & x \leq 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de f.

(b) A função f é derivável?

4. (3 valores)

Considere as funções, reais de variável real, definidas, em domínios apropriados, por

$$f_1(x) = -x \ln x, \qquad f_2(x) = x^{10} + \sqrt[10]{x}, \qquad f_3(x) = \operatorname{arctg} x, \qquad f_4(x) = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

Identifique

(a) uma função que, numa vizinhança da origem, tenda para zero;

(b) uma função cujo declive da reta tangente em $x = 0$ seja igual a um;

(c) uma função que, em $x = 0$, tenha tangente vertical;

(d) uma função cujo declive da reta tangente em $x = 0$ seja igual a zero.

Grupo II
(4 valores)

Em cada uma das questões seguintes, assinale se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F). Não deve apresentar qualquer justificação. Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

V F

1. Quaisquer que sejam x e y números reais, $|x-y| \leq ||x|-|y||$.

2. Se $f : [-3,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $f(x) = f(-x)$ para todo o x, então f é uma função par.

3. $\operatorname{argsenh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

4. Sejam $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e $a, b \in D$. Se $f(a)f(b) < 0$ então f tem um zero em D.

Grupo III
(4 valores)

Em cada uma das questões seguintes, assinale a única afirmação verdadeira. Não deve apresentar qualquer justificação. Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

1. O domínio da função, real de variável real, definida por $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1}$ é

$] -\infty, -\frac{1}{3} [\cup]1, +\infty[$

$] -\infty, -\frac{1}{3}] \cup [1, +\infty[$

$[-\frac{1}{3}, 1]$

Nenhum dos anteriores.

2. Escreve-se $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$ quando, por definição,

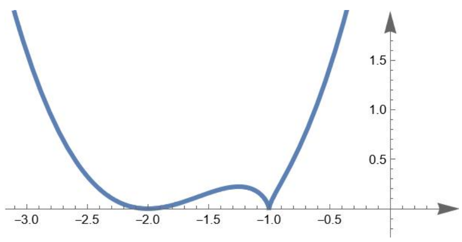
$\forall L > 0, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D \wedge 0 < |x - a| < \varepsilon) \implies f(x) > L$

$\forall L > 0, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D \wedge 0 < |x - a| < L) \implies f(x) > \varepsilon$

$\forall L > 0, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D \wedge f(x) > L) \implies 0 < |x - a| < \varepsilon$

Nenhuma das outras.

3. Seja f a função, real de variável real, representada graficamente na figura



Nestas condições,

O eixo das abcissas define uma reta tangente à curva no ponto $x = -2$.

O eixo das abcissas define uma reta tangente à curva no ponto $x = -1$.

O eixo das abcissas define uma reta tangente à curva no ponto $x = -\frac{1}{4}$.

Nenhuma das anteriores.

4. Sejam $f, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis tais que $h(x) = f(x^2)$, $f'(3) = \pi$ e $f'(9) = 1$. Então uma equação da reta tangente ao gráfico de h em $(3, 2)$ é

$y = 2x - 4$

$y = 6x - 16$

$y = \pi x + 2 - 3\pi$

Nenhuma das anteriores.

FIM