Universidade do Minho
Dep. de Matemática

LEInf
17/novembro/2021
[Duração 1h30]

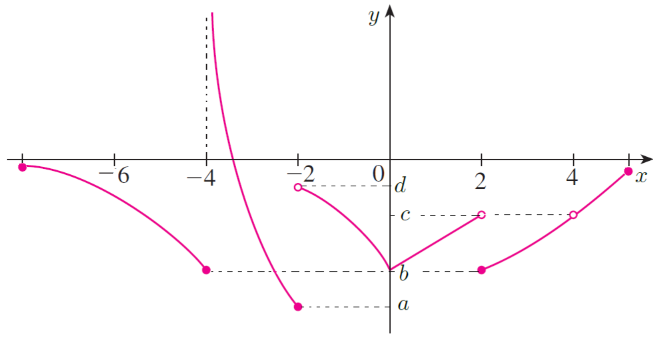
Cálculo para Engenharia – Teste 1 – Proposta de resolução

Nome completo::	Número::

Grupo I
(12 valores)
Justifique convenientemente todas as suas respostas

1. (4 valores)

Considere a função $f : D \longrightarrow E$, onde $D \subset [-8, 5]$, e cujo gráfico está representado na figura.



(a) Indique o domínio D e contradomínio E de f.

Por observação da imagem verifica-se que o domínio de f é o conjunto $D = [-8, 5] \setminus \{4\}$ e o contradomínio é o conjunto $E = [a, +\infty[$.

(b) A função f é injetiva? E sobrejetiva?

A função não é injetiva pois objetos diferentes têm imagens iguais, por exemplo $-4 \neq 2$ mas $f(-4) = f(2) = b$.

A função é sobrejetiva pois cada elemento do conjunto de chegada é imagem de algum objeto (elemento do domínio), isto é, o conjunto de chegada é o contradomínio da função.

(c) Indique o conjunto de pontos de acumulação do domínio de f.

Um número real é ponto de acumulação de um conjunto se estiver "rodeado" por pontos do conjunto. Assim, $D' = [-8, 5]$ pois, embora $4 \notin D$, qualquer vizinhança de 4 contém pontos de D (diferentes de 4).

(d) O que pode dizer sobre $\lim\limits_{x \to \beta} f(x)$ quando $\beta = -4^+$ e $\beta = 4$?

Note-se que quer -4 quer 4 são pontos de acumulação de D. Por observação da imagem conclui-se que $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$ não existe pois f toma valores arbitrariamente grandes positivos quando x se aproxima de -4 por valores superiores. Já $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = c$.

(e) Indique, se existirem, os pontos de descontinuidade de f.

A função f é contínua em $x = \alpha, \alpha \in D \cap D'$ se $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$. Ora em $\alpha = -4, \alpha = -2$ e $\alpha = 2$ não existe $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ pelo que f não é contínua nestes pontos. Estes são os únicos pontos de descontinuidade da função.

(f) Indique uma restrição de f que seja invertível e esboce uma sua representação gráfica.

Uma função é invertível se for bijetiva. Uma restrição bijetiva de f é a função $\tilde{f} :]-4, 2] \longrightarrow E$ definida por $\tilde{f}(x) = f(x)$ e cuja representação gráfica é...

2. (2 valores)

Calcule, se existir, $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \sqrt{|x-1|}$.

Observe-se que $\sqrt{|x-1|} = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x < 1, \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 1. \end{cases}$

Assim, $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \sqrt{|x-1|} = 0$ pois, pelas propriedades dos limites, verifica-se que existem e são iguais os limites laterais

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \sqrt{|x-1|} = \lim_{x \longrightarrow 1^-} \sqrt{1-x} = 0 \qquad \text{e}$$
$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \sqrt{|x-1|} = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0\,.$$

3. (3 valores)

Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{x^2+1}, & x \leq 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de f.

A função f é uma função definida por ramos em intervalos.

Para $x < 0$ a função é definida por uma lei racional sem que o denominador se anule, logo é contínua.

Para $x > 0$, f é definida por uma função trigonométrica inversa contínua, logo f é contínua.

Estude-se por definição a continuidade em $x = 0$. Neste ponto a função será contínua se

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = \pi.$$

Ora, pelas propriedades dos limites,

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\pi}{x^2+1} = \pi$ e

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

pelo que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ não existe e a função f não é contínua em $x = 0$.

(b) A função f é derivável?

Como f não é contínua em $x = 0$, f não é derivável neste ponto, logo não é derivável.

4. (3 valores)

Considere as funções, reais de variável real, definidas, em domínios apropriados, por

$$f_1(x) = -x \ln x, \qquad f_2(x) = x^{10} + \sqrt[10]{x}, \qquad f_3(x) = \operatorname{arctg} x, \qquad f_4(x) = \frac{x^2}{x^2+1}\,.$$

Identifique

(a) uma função que, numa vizinhança da origem, tenda para zero;

A função f_2, numa vizinhança da origem, tende para zero pois, pelas propriedades dos limites,

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f_2(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} [x^{10} + \sqrt[10]{x}] = 0 + 0\,.$$

(b) uma função cujo declive da reta tangente em $x = 0$ seja igual a um;

Sendo f uma função derivável em $x = a$, o declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(a, f(a))$ é igual a $f'(a)$. Ora função f_3 é derivável em $\mathbb{R}$ e $f_3'(x) = [\operatorname{arctg} x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$ donde $f_3'(0) = 1$, pelo que o declive da reta tangente a f_3 em $x = 0$ é um.

(c) uma função que, em $x = 0$, tenha tangente vertical;

A função f_2 está definida em $\mathbb{R}$ mas só é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, tendo-se $f_2'(x) = [x^{10} + \sqrt[10]{x}]' = 10x^9 + \dfrac{1}{10\sqrt[10]{x^9}}$, $\quad x \neq 0$ e

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f_2'(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \left[10x^9 + \frac{1}{10\sqrt[10]{x^9}}\right] = +\infty$$

(o limite não existe). Assim, esta função tem, em $x = 0$, uma tangente vertical.

(d) uma função cujo declive da reta tangente em $x = 0$ seja igual a zero.

Sendo f uma função derivável em $x = a$, o declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(a, f(a))$ é igual a $f'(a)$. Ora função f_4 é derivável em $\mathbb{R}$ e $f_4'(x) = [\dfrac{x^2}{x^2+1}]' = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ donde $f_4'(0) = 0$, pelo que o declive da reta tangente a f_4 em $x = 0$ é zero.

Grupo II
(4 valores)

Em cada uma das questões seguintes, assinale se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F). Não deve apresentar qualquer justificação. Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

	V	F
1. Quaisquer que sejam x e y números reais, $\lvert x-y\rvert \leq \lvert\lvert x\rvert - \lvert y\rvert\rvert$.	○	⊗
2. Se $f : [-3, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $f(x) = f(-x)$ para todo o x, então f é uma função par.	○	⊗
3. $\operatorname{argsenh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.	○	⊗
4. Sejam $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e $a, b \in D$. Se $f(a)f(b) < 0$ então f tem um zero em D.	○	⊗

Grupo III
(4 valores)
Em cada uma das questões seguintes, assinale a única afirmação verdadeira. Não deve apresentar qualquer justificação. Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

1. O domínio da função, real de variável real, definida por $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1}$ é

○ $]-\infty, -\frac{1}{3}[\cup]1, +\infty[$

⊗ $]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [1, +\infty[$

○ $[-\frac{1}{3}, 1]$

○ Nenhum dos anteriores.

2. Escreve-se $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$ quando, por definição,

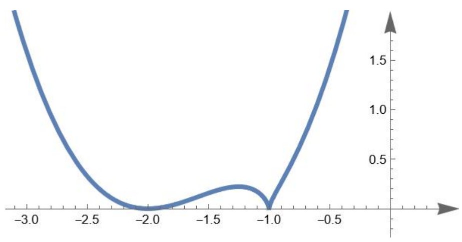
⊗ $\forall L > 0, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D \wedge 0 < |x - a| < \varepsilon) \implies f(x) > L$

○ $\forall L > 0, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D \wedge 0 < |x - a| < L) \implies f(x) > \varepsilon$

○ $\forall L > 0, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D \wedge f(x) > L) \implies 0 < |x - a| < \varepsilon$

○ Nenhuma das outras.

3. Seja f a função, real de variável real, representada graficamente na figura



Nestas condições,

⊗ O eixo das abcissas define uma reta tangente à curva no ponto $x = -2$.

○ O eixo das abcissas define uma reta tangente à curva no ponto $x = -1$.

○ O eixo das abcissas define uma reta tangente à curva no ponto $x = -\frac{1}{4}$.

○ Nenhuma das anteriores.

4. Sejam $f, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis tais que $h(x) = f(x^2)$, $f'(3) = \pi$ e $f'(9) = 1$. Então uma equação da reta tangente ao gráfico de h em $(3, 2)$ é

○ $y = 2x - 4$

⊗ $y = 6x - 16$

○ $y = \pi x + 2 - 3\pi$

○ Nenhuma das anteriores.

FIM