Universidade do Minho
Dep. de Matemática

LEInf
17/janeiro/2022
[Duração 2h00]

Cálculo para Engenharia – Teste 2

~~Nome completo~~:: PROPOSTA DE RESOLUÇÃO | ~~Número~~::

Grupo I (12 valores): Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1. (1.5 valores) Calcule, se existir, $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{\operatorname{tg} x}$.

$\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{0}{0}$; Indeterminação

Aplique-se, por exemplo, a "regra de L'Hôpital":

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{[1-\cos(2x)]'}{(\operatorname{tg} x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-2(-\operatorname{sen}(2x))}{\sec^2 x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\operatorname{tg} x} = 0$$

2. (1.5 valores) Determine o polinómio de Taylor de ordem 3, em torno do ponto $a = 1$, para a função f, definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \ln x$.

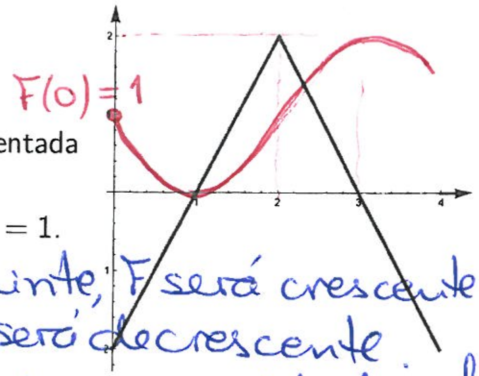
$$P_{3,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

Ora $f(x) = \ln x$, donde $f(1) = \ln 1 = 0$; $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ e $f'(1) = 1$

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ e $f''(1) = -1$; $f'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$ e $f'''(1) = 2$

Assim $P_{3,1}(x) = 0 + 1(x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{3}(x-1)^3$

3. (**2.5 valores**) Considere a função $f : I = [0,4] :\longrightarrow \mathbb{R}$ e representada graficamente na figura.
Esboce, caso exista, a função F, primitiva de f em I tal que $F(0) = 1$.



i) Se $x \in]1,3[$, então $f(x) > 0$ e, por conseguinte, F será crescente. Se $x \in]0,1[\cup]3,4[$, então $f(x) < 0$ e F será decrescente.

ii) Se $x \in]0,2[$, então f é crescente e F terá a concavidade voltada para cima. Se $x \in]2,4[$, f é decrescente e a concavidade de F será voltada para baixo.

iii) $f(x) = 0 \iff x = 1 \vee x = 3$ e, dado o sinal de f respetivamente à esquerda e à direita desses pontos, concluímos que 1 será minimizante e 3 maximizante de F.

iv) $x = 2$ é extremante de f e F terá aí um ponto de inflexão.

4. (**2.5 valores**) Calcule $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\, dx$.

Primitivação por partes:
$$\int u v' = u v - \int u' v$$

Se $\begin{cases} u = x^3 \\ v' = e^{x^2} \end{cases}$, então $\begin{cases} u' = 3x^2 \\ v = ?? \end{cases}$; $\begin{cases} u' = x^3 \\ v = e^{x^2} \end{cases}$ tem-se $\begin{cases} u = \frac{x^4}{4} \\ v' = e^{x^2} \cdot 2x \end{cases}$

Donde $$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \left(2x \cdot e^{x^2}\right) dx \quad (*)$$

e aplicando agora a primitivação por partes, com $\begin{cases} u = x^2 \\ v' = 2x\, e^{x^2} \end{cases}$ tem-se $\begin{cases} u' = 2x \\ v = e^{x^2} \end{cases}$ e, por conseguinte

$$(*) = \frac{1}{2}\left[x^2 e^{x^2} - \int \left(2x\, e^{x^2}\right) dx\right] =$$

$$= \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

5. (**4 valores**) Considere a soma $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}$, $n \in \mathbb{N}$, onde cada a_k é um número inteiro entre 0 e 9.

(a) Escreva a soma anterior, com $n = 3$, na forma de uma fração decimal.

(b) Exprima a dízima 0.112(112) na forma de uma série.

(c) Estude a natureza da série da alínea anterior e, no caso de ser convergente, calcule a sua soma.

(d) Comente a afirmação "A convergência de séries geométricas de razão 1/10 permite atribuir um significado preciso a dízimas infinitas".

a) $n = 1$ $\quad \sum_{k=1}^{3} \frac{a_k}{10^k} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} = \frac{100a_1 + 10a_2 + a_3}{1000}$

$(100) \quad (10) \quad (1)$

b) $0.112(112) = 0,112 + 0,000112 + 0,000000112 + \cdots$

$$= \frac{112}{1000} + \frac{112}{(1000)^2} + \frac{112}{(1000)^3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{112}{(1000)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{112}{10^{3k}}$$

c) A série anterior $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{112}{10^{3k}} = 112 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{3k}}$ é uma série geométrica de razão $\frac{1}{10^3}$. Como $\frac{1}{10^3} < 1$ A série é convergente.

$$112 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{3k}} = 112 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10^3}} - 1 \right) = 112 \left(\frac{1000}{999} - 1 \right) = \frac{112}{999}$$

$$\left(\frac{1}{1-r} - 1 \right)$$

d) A afirmação só é verdadeira para dízimas infinitas periódicas. Estas podem ser re-escritas na forma de uma série geométrica em que a razão é da forma $\frac{1}{10^m}$ $m \geq 1$. Um exemplo disso é o caso de 0,112(112) visto acima. Como $\left|\frac{1}{10^m}\right| < 1$ a série é convergente e temos uma fórmula para calcular a sua soma. Obtendo o valor da dízima na forma de um número racional.

Se a dízima é infinita mas não é periódica o processo não é possível.

Grupo II (4 valores): Em cada uma das questões seguintes, assinale se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F). Não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

	V	F
1. $\int_0^1 e^{x^2} < \int_0^1 e^x \, dx.$	●	○
2. $\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^2} \, dx = -2$	○	●
3. O comprimento da curva definida por $f(x) = \sqrt{x+2}$, entre os pontos de coordenadas $(1, \sqrt{3})$ e $(2, 2)$, calcula-se através do integral $\int_1^2 \sqrt{\frac{4x+9}{4x+8}} \, dx.$	●	○
4. O termo geral da sucessão das somas parciais da série (de Mengoli) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ é $s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}.$	○	●

Grupo III (4 valores): Em cada uma das questões seguintes, assinale a única afirmação verdadeira. Não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

1. Usando a substituição $x = t^2 + 1$, é possível escrever o integral $\int x\sqrt{x-1}\, dx$, como

○ $2\int (t^3 + t)\, dt$ ○ $\int (t^2 + 1)|t|\, dt$

● $2\int (t^4 + t^2)\, dt$ ○ Nenhuma dos anteriores.

2. Na estimativa de $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx \approx \frac{5}{6}$, considerou-se a partição $\mathcal{P} = \left\{1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ e usou-se uma soma de Riemann,

○ inferior ● superior

○ média ○ Nenhuma das anteriores.

3. Sabendo que $\int_0^1 f(x)\, dx = 6$, $\int_0^2 f(x)\, dx = 4$, $\int_2^5 f(x)\, dx = 1$, ter-se-á

● $\int_0^5 f(x)\, dx = 5$ ○ $\int_0^5 f(x)\, dx = 9$

○ $\int_0^5 f(x)\, dx = 7$ ○ Nenhuma das anteriores.

4. Usando integrais definidos, a área da região delimitada pelo gráfico da função $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0,1] \\ -3, & \text{se } x \in]1,2] \end{cases}$ e pelo eixo das abcissas, expressa-se da seguinte forma

○ $-\int_0^1 g(x)\, dx - \int_1^2 g(x)\, dx$ ● $\int_0^1 g(x)\, dx - \int_1^2 g(x)\, dx$

○ $\int_0^1 g(x)\, dx + \int_1^2 g(x)\, dx$ ○ Nenhuma das anteriores.