Universidade do Minho
Dep. de Matemática

LEInf
3/fevereiro/2023
[Duração: 1 H45 M]

Cálculo para Engenharia – Exame de Recurso

Nome completo::	Número::

Assinale a prova que realiza: Exame ◯ Parte 1 ◯ Parte 2 ◯
Os estudantes que **realizam o Exame** devem responder às questões assinaladas com (E).
Assinale, no caso de realizar a prova, para melhoria de classificação: MELHORIA ◯

Parte 1[1]

Grupo I (12 valores): Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1. (6 **valores**) Considere a função, real de variável real, definida por $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2} - 2}$.

(a) Determine o domínio de h.

(b) Indique duas funções f e g, diferentes da identidade e tais que $h = f \circ g$.

(c) Calcule, se existirem,

c.1) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$. (E) **c.2)** $\lim\limits_{x\to\sqrt{8}^+} h(x)$. **c.3)** $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)$.

(E) **(d)** Identifique e classifique os pontos críticos de h.

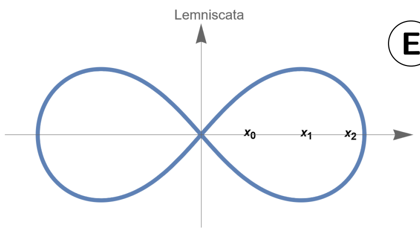
(e) Defina, se existir, a função inversa h^{-1}.

2. (2 **valores**) Prove que

$$\cosh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\cosh x + 1\right)}.$$

(E) **3.** (1,5 **valores**) Determine as constantes reais A e B, tais que a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 2 \\ A, & x = 2 \\ Bx^2 - 2, & 2 < x \end{cases}$ é contínua quando $x = 2$.

4. (2,5 **valores**) Considere a *lemniscata*, da figura, definida pela equação $8(x^2+y^2)^2 = 100(x^2-y^2)$.



(E) **(a)** Use derivação implícita para definir a reta tangente à lemniscata, no ponto de coordenadas $(3, 1)$.

(b) Qual das abcissas x_0, x_1 ou x_2 pode ser, nesta lemniscata, igual a 3?

v.s.f.f.

[1] As cotações das questões (E) são, nesta parte, $0.5 + 1.5 + 1.5 + 1,5$ valores, respetivamente.

Grupo II (4 valores): Em cada uma das questões seguintes, assinale se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F). Não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

	V	F
1. A equação $y = \sqrt{2 - x^2}$, com $x \in [-1, 1]$ define uma semi-circunferência.	○	○
E **2.** A função definida por $h(x) = \dfrac{1}{\text{sen}\,\lvert x\rvert + 3}$ é par.	○	○
E **3.** Se $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{f(x)}{x} \right)$ existe, então $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.	○	○
4. $y = 1 + \dfrac{x}{4}$ define a reta tangente à curva definida por $f(x) = \sqrt{x}$, quando $x = 4$.	○	○

Grupo III (4 valores): Em cada uma das questões seguintes, assinale a única afirmação verdadeira. Não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

1. Se $n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-n}$

- ○ é um infinitamente grande.
- ○ é zero.
- ○ não existe.
- ○ Nenhuma das anteriores.

E **2.** Se f, função real de variável real, é definida por $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, então

- ○ f é derivável em $x = 0$.
- ○ f é contínua em $x = 0$.
- ○ f admite uma tangente vertical em $x = 0$.
- ○ Nenhuma das anteriores.

E **3.** Se f e g são duas funções reais de variável real, definidas em $\mathbb{R}$, tais que $f'(x) > g'(x)$ e $f(0) = g(0)$, então

- ○ $f(x) < g(x)$, para $x \in]-\infty, 0[$.
- ○ $f(x) < g(x)$, para $x \in]0, +\infty[$.
- ○ $f(x) > g(x)$, para $x \in]-\infty, 0[$.
- ○ Nenhuma das anteriores.

4. Uma curva definida por $y = A + B\cos(2x)$ tem um ponto de inflexão no ponto de coordenadas $\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$, quando

- ○ $A = 1$ e B é um número real qualquer.
- ○ $A = 1$ e $B = 1$.
- ○ A é um número real qualquer e $B = 1$.
- ○ Nenhuma das anteriores.

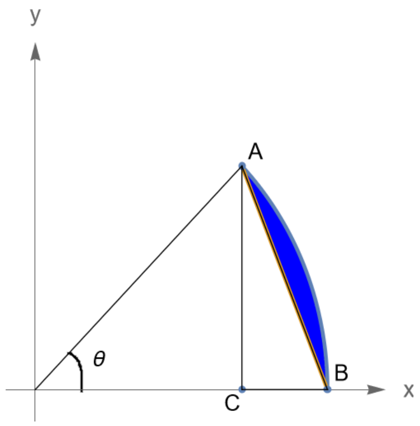
Grupo I (12 valores): Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1. (3 valores) Calcule

(a) se existir, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^{1/(1+\ln x)}\right]$ E **(b)** $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx.$

E **2. (2 valores)** Calcule o comprimento da curva definida por $y = \cosh x$, entre $x = 0$ e $x = \ln 2$. Apresente a sua resposta na forma de um número racional.

3. (1,5 valores) Na figura $[ABC]$ é um triângulo retângulo em C.



Sabendo que a região sombreada denota um segmento circular delimitado pela corda $[AB]$ e por uma circunferência unitária cujo centro é a origem do referencial, exprima, quando $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ e usando integrais adequados, a área do segmento circular sombreado na figura.

Nota:: Não calcule este integral.

4. (3 valores) Considere a sucessão definida por $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}\,dx.$

(a) Calcule a_3.

E **(b)** Calcule, se existir, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

E **(c)** Analise a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

5. (2,5 valores) Considere a dízima infinita periódica $d = 1,3636(36)$.

(a) Expresse d na forma de uma série, usando a notação 'sigma' (isto é, $\sum$).

E **(b)** Expresse d na forma de uma fracção.

v.s.f.f.

[2] As cotações das questões E são, nesta parte, $1.5+2+1+1+1.5$ valores, respetivamente.

Grupo II (4 valores): **Em cada uma das questões seguintes, assinale se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F). Não deve apresentar qualquer justificação.**
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

	V	F
E **1.** O polinómio de Taylor, de ordem 2, gerado pela função, real de variável real, definida por $f(x) = \ln(\cos x)$, em torno de $x = 0$ é $P_{2,0}(x) = \dfrac{-x^2}{2}$.	○	○
E **2.** Se $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $u : \mathbb{R} \longrightarrow [a, b]$ e $v : \mathbb{R} \longrightarrow [a, b]$ são diferenciáveis, então $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt = f(v(x))\dfrac{dv}{dx} + f(u(x))\dfrac{du}{dx}$	○	○
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \quad \leq \quad \frac{1}{e}$	○	○
4. A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n \frac{5}{4^n}\right)$ é geométrica.	○	○

Grupo III (4 valores): **Em cada uma das questões seguintes, assinale a única afirmação verdadeira. Não deve apresentar qualquer justificação.**
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

1. Para uma função, real de variável real, estritamente decrescente num dado intervalo, a soma de Riemann à direita, com um determinado número de subdivisões, é sempre

- ○ menor do que a soma inferior.
- ○ menor do que a soma superior.
- ○ igual à soma à esquerda.
- ○ Nenhuma das anteriores.

2. Se f é uma função racional própria definida por $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, então $\displaystyle\int f(x)\, dx = \int \frac{A + B\,x}{q(x)} dx$, onde A, B, números reais, quando $q(x)$ for

- ○ um produto de dois factores lineares distintos.
- ○ um produto de dois factores lineares repetidos.
- ○ for um polinómio quadrático irredutível.
- ○ Nenhuma das anteriores.

E **3.** Para $|x| < 1$,

- ○ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx = \operatorname{argcosh}(-x) + \mathcal{C}$.
- ○ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx = -\operatorname{argcosh}(-x) + \mathcal{C}$.
- ○ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx = \operatorname{argcosh}(x) + \mathcal{C}$.
- ○ Nenhuma das anteriores.

E **4.** A série de potências definida por $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$

- ○ converge para $x = -1$ e diverge para $x = 3$.
- ○ converge para $x = -1$ e para $x = 3$.
- ○ diverge para $x = -1$ e converge para $x = 3$.
- ○ Nenhuma das anteriores.