Universidade do Minho
Dep. de Matemática

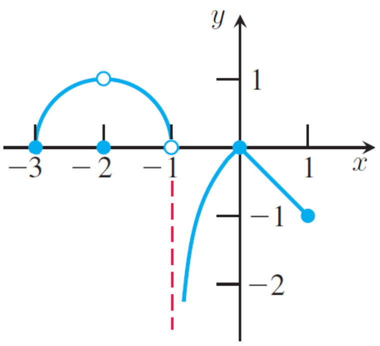
LEInf
2/novembro/2022
[Duração 2h00]

Cálculo para Engenharia – Teste 1– Proposta de resolução

Nome completo::	Número::

Grupo I (12 valores): Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1. (4 valores) Considere a função $f : \mathcal{D} \subset [-3, 1] \longrightarrow \mathcal{E} \subset \mathbb{R}$, cuja representação gráfica é a da figura.



(a) Identifique o domínio e o contradomínio de f.

(b) Indique todos os números reais a e b tais que $f(1) = a$ e $f(b) = 0$.

(c) Indique, se existirem, $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to -2} f(x)$.

(d) Averigue a continuidade de f, indicando, se existirem, pontos onde f não é contínua.

(e) Esboce na figura se existir, ou justifique porque não existe, a reta tangente ao gráfico de f, no ponto de coordenadas $(0, 0)$.

(f) Indique se existir, ou justifique porque não existe, um prolongamento contínuo de f a $[-3, 1]$.

(g) Indique uma restrição de f que seja invertível.

(h) Indique, se existir, um intervalo onde $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$.

2. **(**2 **valores)** Calcule

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(x-\lfloor x\rfloor)$.

(b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, quando $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\in\mathbb{Z} \\ 2x, & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$.

3. **(**2 **valores)** Determine $c\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, de tal forma que a função $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por

$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x-c}{c+1}, & x\leq -1 \\ x^2+c, & x>-1 \end{cases}$, seja contínua no seu domínio.

4. **(**1 **valor)** Calcule a derivada da função f, tal que $f(x) = x^x$ (definida no maior domínio possível).

5. **(**3 **valores)** Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$.

a) Prove que f é invertível, no seu domínio, e defina a função inversa f^{-1}.

b) Determine a derivada da função inversa f^{-1}.

c) Comente o resultado obtido na alínea anterior, em articulação com o teorema da derivada da função inversa.

Grupo II (4 valores): Em cada uma das questões seguintes, assinale se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F). Não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

V F

1. Se, para cada $\varepsilon > 0$, existir x tal que $0 < |x-1| < \varepsilon$ e $|f(x)-2| \geq \frac{1}{2}$, então $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

2. Se $|f|$ é uma função, real de variável real, contínua em $x = c$, então f também é contínua em $x = c$.

3. Se f é uma função, real de variável real, derivável e tal que $f'(1) = 7$, então $g = \frac{1}{f}$ também é derivável e $g'(1) = \frac{1}{7}$.

4. Se f é uma função ímpar, então f' é uma função par.

Grupo III (4 valores): Em cada uma das questões seguintes, assinale a única afirmação verdadeira. Não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

1. Se f, função real de variável real, é definida por $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$, então

- $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.
- $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$.
- $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$.
- Nenhuma das anteriores.

2. Considere a função definida implicitamente por $x^2y^3 + 3y^2x = 2$. Com $y = f(x)$ derivável tem-se

- $\frac{dy}{dx} = \frac{-3y^2 - 2xy^3}{3x^2y^2 + 6yx}$.
- $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2y + 6x}{-3y - 2xy^2}$.
- $\frac{dy}{dx} = 2xy^3 + 3xy^2 + 6yx + 3y^2$.
- Nenhuma das anteriores.

3. O $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, quando $f(x) = \sqrt{x}$ e $x = 3$,

- não existe.
- é igual a $\sqrt{3}$
- é igual a $\frac{1}{2\sqrt{3}}$.
- Nenhuma das anteriores.

4. Têm assintotas verticais definidas por $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$, os gráficos das funções f e g definidas por

- $f(x) = \operatorname{cosec} x$ e $g(x) = \tan x$.
- $f(x) = \sec x$ e $g(x) = \tan x$.
- $f(x) = \sec x$ e $g(x) = \operatorname{cotg} x$.
- Nenhuma das anteriores.