Universidade do Minho
Dep. de Matemática

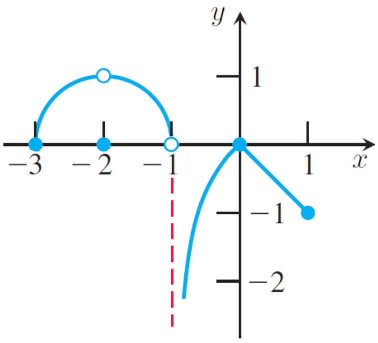
LEInf
2/novembro/2022
[Duração 2h00]

Cálculo para Engenharia – Teste 1– Proposta de resolução

Nome completoː: | Númeroː:

Grupo I (12 valores): Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1. (4 valores) Considere a função $f : \mathcal{D} \subset [-3, 1] \longrightarrow \mathcal{E} \subset \mathbb{R}$, cuja representação gráfica é a da figura.



(a) Identifique o domínio e o contradomínio de f.

Por observação da imagem $\mathcal{D} = [-3, 1] \setminus \{-1\}$ e $\mathcal{E} =]-\infty, 1[$.

(b) Indique todos os números reais a e b tais que $f(1) = a$ e $f(b) = 0$.

$a = -1$ pois $f(1) = -1$; $b = -3$ ou $b = -2$ ou $b = 0$ pois $f(-3) = f(-2) = f(0) = 0$.

(c) Indique, se existirem, $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to -2} f(x)$.

Não existe $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ pois a função assume valores arbitrariamente grandes negativos quando x se aproxima de -1 por valores superiores.

Por outro lado, $\lim_{x\to -2} f(x) = 1$ pois $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = 1$.

(d) Averigue a continuidade de f, indicando, se existirem, pontos onde f não é contínua.

Uma função é contínua num ponto $a \in \mathcal{D}$ se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. A função f é contínua em $\mathcal{D} \setminus \{-2\}$ pois $x = -2$ é o único ponto do domínio de f para o qual, existindo limite, $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. Observe-se que $x = -1$ não está no domínio de f pelo que não faz sentido estudar a continuidade de f neste ponto.

(e) Esboce na figura se existir, ou justifique porque não existe, a reta tangente ao gráfico de f, no ponto de coordenadas $(0, 0)$.

Não existe reta tangente ao gráfico em $(0, 0)$ uma vez que o gráfico apresenta, neste ponto, um ponto anguloso, indicando que f não é derivável em $x = 0$.

(f) Indique se existir, ou justifique porque não existe, um prolongamento contínuo de f a $[-3, 1]$.

Não existe um prolongamento contínuo de f ao intervalo $[-3, 1]$ podendo ser apresentadas duas razões. A função f não é contínua (em $x = -2$) logo nenhum seu prolongamento o será; além disso não é possível prolongar a função por continuidade ao ponto $x = -1$ por não existir $\lim_{x\to -1} f(x)$.

(g) Indique uma restrição de f que seja invertível.

Uma função é invertível se for bijetiva. Uma restrição de f que satisfaz esta condição é, por exemplo, a função $g : [-3, -2[\cup]-1, 0] \longrightarrow]-\infty, 1[$.

(h) Indique, se existir, um intervalo onde $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$.

Dos corolários do teorema de Lagrange, sabe-se que, se num intervalo $]a, b[$, $f'(x) > 0$ então f é crescente e se $f''(x) < 0$ então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo. Um intervalo nestas condições é, por exemplo, $]-3, -2[$.

2. (2 valores) Calcule

(a) $\lim_{x\to 0}(x-\lfloor x\rfloor)$.

Atendendo à definição da função chão, numa vizinhança de $x=0$ tem-se

$$\lfloor x\rfloor=\begin{cases}-1, & -1\le x<0\\ 0, & 0\le x<1\end{cases}\qquad \text{donde}\quad x-\lfloor x\rfloor=\begin{cases}x+1, & -1\le x<0\\ x, & 0\le x<1\end{cases}$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0^-}(x-\lfloor x\rfloor)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+}(x-\lfloor x\rfloor)=\lim_{x\to 0^+}x=0,$$

isto é, os limites laterais são diferentes, pelo que não existe o limite proposto.

(b) $\lim_{x\to 1}f(x)$, quando $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\in\mathbb{Z}\\ 2x, & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{Z}}}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=2=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\notin\mathbb{Z}}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\notin\mathbb{Z}}}2x$. Logo

$$\lim_{x\to 1}f(x)=2.$$

3. (2 valores) Determine $c\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, de tal forma que a função $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por

$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x-c}{c+1}, & x\le -1\\ x^2+c, & x>-1\end{cases}$, seja contínua no seu domínio.

A função g será contínua quando for contínua em qualquer ponto do seu domínio. Em particular, para $x<-1$ e $x>-1$ a função é contínua por ser definida por polinómios (uma vez que $c\neq -1$, por hipótese).

A função será contínua em $a=-1$ se existir $\lim\limits_{x\to -1}g(x)$ e $\lim\limits_{x\to -1}g(x)=g(-1)$.

Ora $\lim\limits_{x\to -1}g(x)$ existe se e só se os limites laterais existem e são iguais:

$$\lim_{x\to -1^-}g(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x-c}{c+1}=\frac{-1-c}{c+1}=-1$$

então, deve-se ter $-1=1+c\Rightarrow c=-2$

$$\lim_{x\to -1^+}g(x)=\lim_{x\to -1^+}(x^2+c)=1+c$$

Para $c=-2$, $g(-1)=-1=\lim\limits_{x\to -1}g(x)$. Desta forma, conclui-se que a função g será contínua se $c=-2$.

4. **(1 valor)** Calcule a derivada da função f, tal que $f(x) = x^x$ (definida no maior domínio possível).

Para $x > 0$, das propriedades das funções exponencial e logarítmica $f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$.
Por outro lado, da derivada da função composta $[(g \circ u)(x)]' = u'(x)\, g'(u(x))$. Tomando

$$f(x) = g(u(x)) = e^{x \ln x}, \qquad u(x) = x \ln x, \qquad g(x) = e^x$$

tem-se $u'(x) = [x \ln x]' = \ln x + 1$ e $g'(x) = e^x$ donde $g'(u(x)) = e^{x \ln x}$. Assim,

$$f'(x) = [g(u(x))]' = (\ln x + 1)\, e^{x \ln x} = (1 + \ln x)\, x^x\,.$$

5. **(3 valores)** Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$.

a) Prove que f é invertível, no seu domínio, e defina a função inversa f^{-1}.

A função f é invertível se e só se for bijetiva, isto é, injetiva e sobrejetiva.
A função em estudo é injetiva pois para todo o $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ então $x^3 \neq y^3$; a função é sobrejetiva pois para todo o $y \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = x^3$.
A função inversa de f, é a função $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei é obtida resolvendo em ordem a x a equação $f(x) = y$:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^3 = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y},$$

isto é $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

b) Determine a derivada da função inversa f^{-1}.

A função f é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Usando a regra da derivada da potência para $y \neq 0$,

$$(f^{-1})'(y) = (\sqrt[3]{y})' = (y^{1/3})' = \frac{1}{3y^{2/3}}\,.$$

c) Comente o resultado obtido na alínea anterior, em articulação com o teorema da derivada da função inversa.

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em $\mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$ para $x \neq 0$ e f^{-1} é contínua em $\mathbb{R}$.
Do teorema da derivada da função inversa, $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ (c.f. Formulário 2, linha 2, coluna 2).
Ora $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ e $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ pelo que para $y \neq 0$

$$(f^{-1})'(y) = (\sqrt[3]{y})' = \frac{1}{f'(\sqrt[3]{y})} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{y})^2} = \frac{1}{3y^{2/3}}\,.$$

Tal como esperado, os resultado obtido é igual ao da alínea b).

Grupo II (4 valores): Em cada uma das questões seguintes, assinale se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F). Não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

	V	F
1. Se, para cada $\varepsilon > 0$, existir x tal que $0 < \|x-1\| < \varepsilon$ e $\|f(x)-2\| \geq \frac{1}{2}$, então $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.	○	⊗
2. Se $\|f\|$ é uma função, real de variável real, contínua em $x = c$, então f também é contínua em $x = c$.	○	⊗
3. Se f é uma função, real de variável real, derivável e tal que $f'(1) = 7$, então $g = \frac{1}{f}$ também é derivável e $g'(1) = \frac{1}{7}$.	○	⊗
4. Se f é uma função ímpar, então f' é uma função par.	⊗	○

Grupo III (4 valores): Em cada uma das questões seguintes, assinale a única afirmação verdadeira. Não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

1. Se f, função real de variável real, é definida por $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$, então

⊗ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$.

○ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$.

○ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$.

○ Nenhuma das anteriores.

2. Considere a função definida implicitamente por $x^2y^3 + 3y^2x = 2$. Com $y = f(x)$ derivável tem-se

⊗ $\frac{dy}{dx} = \frac{-3y^2 - 2xy^3}{3x^2y^2 + 6yx}$.

○ $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2y + 6x}{-3y - 2xy^2}$.

○ $\frac{dy}{dx} = 2xy^3 + 3xy^2 + 6yx + 3y^2$.

○ Nenhuma das anteriores.

3. O $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, quando $f(x) = \sqrt{x}$ e $x = 3$,

○ não existe.

○ é igual a $\sqrt{3}$

⊗ é igual a $\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

○ Nenhuma das anteriores.

4. Têm assintotas verticais definidas por $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$, os gráficos das funções f e g definidas por

○ $f(x) = \operatorname{cosec} x$ e $g(x) = \tan x$.

⊗ $f(x) = \sec x$ e $g(x) = \tan x$.

○ $f(x) = \sec x$ e $g(x) = \operatorname{cotg} x$.

○ Nenhuma das anteriores.