2. (4 **valores**) Considere a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi \\ a, & \text{se } x = \pi \end{cases}$ e contínua no seu domínio.

1.5 **(a)** Calcule a.

1 **(b)** Calcule, se existir, $f'(\pi)$.

1.5 **(c)** Determine $(f \circ g)'(1)$, sabendo que a função g, real de variável real. é diferenciável em $\mathbb{R}$ e que $g(1) = 0$ e $g'(1) = 2$.

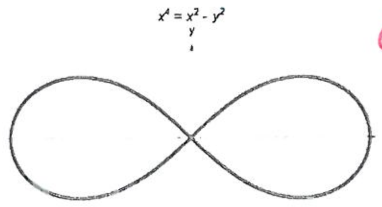
3. (3 **valor**) Calcule, se existirem, ou mostre que não existem

1 **(a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - x)$

1 **(b)** $\lim\limits_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

1 **(c)** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x}{x^2}\right)$

4. (2 **valores**) A *lemniscata*, na figura, é definida por $x^4 = x^2 - y^2$.



0.5 **(a)** Identifique os pontos de interseção desta *lemniscata* com o eixo das abcissas.

1.5 **(b)** Use derivação implícita para definir a reta tangente à *lemniscata*, no ponto de coordenadas $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

v.s.f.f.

Grupo II (5 valores): Em cada uma das questões seguintes, assinale se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F). Não deve apresentar qualquer justificação. Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

V F

1. Se f é a função (chão), definida por $f(x) = \lfloor x \rfloor$, então $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor^2 = \lfloor x^2 \rfloor$.
2. A função cosseno, restrita ao intervalo $[4\pi, 5\pi]$, é invertível.
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\operatorname{sen} x}{1}$.
4. Se $\operatorname{arcsen} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, então existe uma recta tangente ao seu gráfico, quando $x = 1$.
5. Se f é contínua em b e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim\limits_{x\to a} (f \circ g)(x) = f[g(a)]$.

Grupo III (5 valores): Em cada uma das questões seguintes, assinale a única afirmação verdadeira. Não deve apresentar qualquer justificação. Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

1. O gráfico da função, real de variável real, definida por $f(x) = e^{-x^2}$ é simétrico,
   - em relação à origem.
   - em relação ao eixo das abcissas.
   - em relação ao eixo das ordenadas.
   - Nenhuma das anteriores.

2. Se $r \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^r}$
   - é um infinitamente grande positivo.
   - $= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^r}$.
   - é zero.
   - Nenhuma das anteriores.

3. Se f, função real de variável real, é definida por $f(x) = \begin{cases} x^3 - \frac{1}{2}, & \text{se } x \le 1 \\ \dfrac{x^2}{2}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$, então
   - f é derivável em $x = 1$.
   - f admite uma tangente vertical em $x = 1$.
   - f é contínua em $x = 1$.
   - Nenhuma das anteriores.

4. Se $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, então
   - $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = (-1)^n . \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.
   - $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} . \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.
   - $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = (-1)^n . \dfrac{(n+1)!}{x^{n+1}}$.
   - Nenhuma das anteriores.

5. $(\ln(\ln x))'$
   - $= \dfrac{x}{\ln x}$.
   - $= \dfrac{1}{\ln x}$.
   - $= \dfrac{1}{x \ln x}$.
   - Nenhuma das anteriores.

LEInf

4/novembro/2023

[Duração: 1 H30 M]

Universidade do Minho

Dep. de Matemática

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Cálculo para Engenharia – Teste1

Nome ~~completo~~::	Número::

Parte 1

Grupo I (10 valores): Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1. **(1 valores)** Prove que: $\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1.$