2. **(4 valores)** Considere a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi \\ a, & \text{se } x = \pi \end{cases}$ e contínua no seu domínio.

1.5 **(a)** Calcule a.

1 **(b)** Calcule, se existir, $f'(\pi)$.

1.5 **(c)** Determine $(f \circ g)'(1)$, sabendo que a função g, real de variável real, é diferenciável em $\mathbb{R}$ e que $g(1) = 0$ e $g'(1) = 2$.

(a) $D_f = \mathbb{R} = D'_f$; ou seja, π é ponto de acumulação (para além de pertencer a D_f). Donde f é contínua em $x \neq \pi$ porque a função definida por $\frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}$ é um quociente de 2 funções contínuas e f será contínua em $x = \pi$, quando (definição) $\lim_{x\to\pi} f(x)$ existir e for igual a $f(\pi)$. Ora, $\lim_{x\to\pi} f(x) =$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi} \underset{\text{regra de L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)\text{ind.}}{=}} \lim_{x\to\pi} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{(x-\pi)'} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos x}{1} = -1.$$

Por conseguinte, f é contínua no seu domínio quando $f(\pi) = a = -1$

(b) $$f'(\pi) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(\pi+h)}{\pi+h-\pi} - (-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi+h)+h}{h^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)\text{ind.}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\cos(\pi+h)+1}{2h} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)\text{ind.}}{=}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(\pi+h)}{2} = 0$$ (Obs: π é ponto crítico de f)

(c) $$(f \circ g)'(1) \underset{\text{derivada da função composta}}{=} f'[g(1)] \times g'(1) = f'(0) \times 2$$

Para $x \neq \pi$, $f'(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}\right)' = \frac{(x-\pi).\cos x - \operatorname{sen} x \cdot 1}{(x-\pi)^2}$

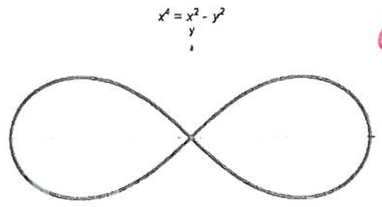
Ou seja $f'(0) = \frac{(0-\pi).\cos 0 - \operatorname{sen} 0}{(0-\pi)^2} = -\frac{1}{\pi}$

Donde $(f \circ g)'(1) = f'(0) \times 2 = -\frac{1}{\pi} \times 2 = -\frac{2}{\pi}$

3. **(3 valor)** Calcule, se existirem, ou mostre que não existem

1 **(a)** $\lim_{x\to+\infty} (\ln x - x) = -\infty$ 1 **(b)** $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = 1$ 1 **(c)** $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$

Vd. Folha 1* **4.** **(2 valores)** A *lemniscata*, na figura, é definida por $x^4 = x^2 - y^2$.



0.5 **(a)** Identifique os pontos de interseção desta *lemniscata* com o eixo das abcissas.

1.5 **(b)** Use derivação implícita para definir a reta tangente à *lemniscata*, no ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

(3)(a) $\lim_{x\to+\infty} (\ln x - x) = \infty - \infty$ (ind.)

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x - x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} x \times \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 1\right)$$

$$= +\infty \times \left(\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\text{ind.}} - \lim_{x\to+\infty} 1\right) = +\infty \times \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} - 1\right) =$$

$$= +\infty \times \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} - 1\right) = +\infty \times (0 - 1) = -\infty$$

(b) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = 0^0$ (ind.). Calcule-se $\lim_{x\to 0^+} \left[\ln\left(\operatorname{sen} x^{\operatorname{sen} x}\right)\right] =$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[\operatorname{sen} x . \ln(\operatorname{sen} x)\right] = 0 \times \infty \text{ (ind.)}$$

$$\overset{\shortparallel}{\lim_{x\to 0^+}} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\text{ind.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(\operatorname{sen} x))'}{\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (-\operatorname{sen} x) = 0.$$ Donde $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1$

(c) $$\left(\frac{e^x}{x^2}\right)' = \frac{x^2 e^x - e^x (x^2)'}{x^4} = \frac{e^x x^2 - e^x . 2x}{x^4}$$

$$= \frac{e^x (x-2)}{x^3}$$

v.s.f.f.

Grupo II (5 valores): **Em cada uma das questões seguintes, assinale se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F).** **Não deve apresentar qualquer justificação.** **Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.**

	V	F
1. Se f é a função (chão), definida por $f(x) = \lfloor x \rfloor$, então $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor^2 = \lfloor x^2 \rfloor$.	○	⊗
2. A função cosseno, restrita ao intervalo $[4\pi, 5\pi]$, é invertível.	⊗	○
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{1}$.	○	⊗
4. Se $\operatorname{arcsen} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, então existe uma recta tangente ao seu gráfico, quando $x = 1$.	⊗	○
5. Se f é contínua em b e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim\limits_{x\to a} (f \circ g)(x) = f[g(a)]$.	○	⊗

Grupo III (5 valores): **Em cada uma das questões seguintes, assinale a única afirmação verdadeira.** **Não deve apresentar qualquer justificação.** **Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.**

1. O gráfico da função, real de variável real, definida por $f(x) = e^{-x^2}$ é simétrico,
   - ○ em relação à origem.
   - ○ em relação ao eixo das abcissas.
   - ⊗ em relação ao eixo das ordenadas.
   - ○ Nenhuma das anteriores.

2. Se $r \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^r}$
   - ○ é um infinitamente grande positivo.
   - ○ $= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r}$.
   - ○ é zero.
   - ⊗ Nenhuma das anteriores.

3. Se f, função real de variável real, é definida por $f(x) = \begin{cases} x^3 - \frac{1}{2}, & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{x^2}{2}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$, então
   - ○ f é derivável em $x = 1$.
   - ○ f admite uma tangente vertical em $x = 1$.
   - ⊗ f é contínua em $x = 1$.
   - ○ Nenhuma das anteriores.

4. Se $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, então
   - ⊗ $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = (-1)^n . \frac{n!}{x^{n+1}}$.
   - ○ $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} . \frac{n!}{x^{n+1}}$.
   - ○ $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = (-1)^n . \frac{(n+1)!}{x^{n+1}}$.
   - ○ Nenhuma das anteriores.

5. $(\ln(\ln x))'$
   - ○ $= \frac{x}{\ln x}$.
   - ○ $= \frac{1}{\ln x}$.
   - ⊗ $= \frac{1}{x \ln x}$.
   - ○ Nenhuma das anteriores.

Universidade do Minho
Dep. de Matemática

LEInf
4/novembro/2023
[Duração: 1 H30 M]

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Cálculo para Engenharia – Teste1

Nome completo::

Número::

Parte 1

Grupo I (10 valores): Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1. **(1 valores)** Prove que: $\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

Sabendo que $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,

ter-se-á $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \frac{\cancel{e^{2x}} + 2e^{x-x} + \cancel{e^{-2x}}}{4} - \frac{\cancel{e^{2x}} - 2e^{x-x} + \cancel{e^{-2x}}}{4} = \frac{4e^0}{4} = 1$ c.q.d.

4* (a) $\begin{cases} x^4 = x^2 - y^2 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee\ x = \pm 1$ $\therefore$ Os pontos de interseção da 'lemniscata' com o eixo das abcissas (definido por $y=0$) são $(-1,0), (0,0), (1,0)$.

(b) $\frac{d}{dx}(x^4) = \frac{d}{dx}(x^2 - y^2) \Leftrightarrow 4x^3 \frac{dx}{dx} = 2x\frac{dx}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^3 = x - y\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x - 2x^3}{y}$. Donde $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{P=\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)} =$

$= \frac{\frac{1}{2} - 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}{-\frac{\sqrt{3}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, que é o declive da reta tangente à 'lemniscata' em P.

A reta tangente é definida por $y - y_0 = m(x - x_0)$, com $(x_0, y_0) = P$ e $m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, isto é,

$$y + \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}_{\text{ordenada na origem}}$$