Universidade do Minho
Dep. de Matemática

LEInf
8/janeiro/2024
[Duração: 2 H]

Cálculo para Engenharia – Teste2

Nome ~~completo~~:: PROPOSTA DE RESOLUÇÃO | Número::

Parte 1

Grupo I (10 valores): Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1. **(4 valores)** Calcule

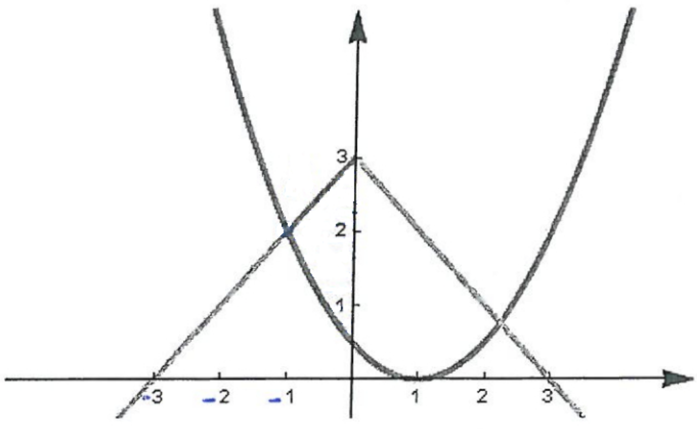
(a) $\int e^x \cos(e^x)\, dx$. **(b)** $\int \arccos(x)\, dx$. **(c)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x) \cos(x)\, dx$. **(d)** $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\, dx$; fazendo $t = e^x$.

v.s.f.f.

2. (1 valor) Sabendo que $G(x) = 2 + \int_0^{3x} e^{-t^2}\,dt$, determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $G'(x) = \frac{3}{e^9}$.

3. (2.5 valores) Considere $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}(x-1)^2 \leq y \leq -|x| + 3\right\}$, na figura.

Calcule a **área da região sombreada**.



4. (2.5 **valores)** Segundo Grandi (Monge Italiano, 1671-1742) *"a soma de um número infinito de zeros é igual a* $\frac{1}{2}$*"* porque, por um lado,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1} = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+0+\cdots \tag{A}$$

e, por outro lado,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots, \text{ quando } x = 1, \quad \text{é equivalente a} \quad \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}. \tag{B}$$

(a) Identifique e corrija os erros evidenciados em ambas as afirmações, (A) e (B), deste 'paradoxo'.

(b) Estude a natureza de $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}$.

v.s.f.f.

Grupo II (4 valores): Em cada uma das questões seguintes, assinale se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F). Não deve apresentar qualquer justificação.

Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

V F

1. $\forall x \in D_f, \; \displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{1}{x}\int x\,f(x)\,dx.$

2. $\displaystyle\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) + \int f'(x)\,g(x)\,dx.$

3. Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável, então $\displaystyle\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) \in \mathbb{R}.$

4. Quando $x \in [1, +\infty[$, a área da região delimitada pelo eixo das abcissas e pela curva definida por $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ é finita.

5. Se $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (|u_n| + |v_n|)$ converge, então $\displaystyle\sum_{n\geq 1} |u_n|$ também converge.

Grupo III (4 valores): Em cada uma das questões seguintes, assinale a única afirmação verdadeira. Não deve apresentar qualquer justificação.

Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

1. Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$. A soma de Riemann que melhor aproxima a área da região delimitada pelo gráfico de f, o eixo das abcissas e as retas verticais definidas por $x = a$, $x = b$ é

a soma à direita. | a soma superior.

a soma à esquerda. | Nenhuma das anteriores.

2. No cálculo de $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\,(x^2+1)}$, a forma para a decomposição em frações parciais é

$\dfrac{1}{x^2\,(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ | $\dfrac{1}{x^2\,(x^2+1)} = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

$\dfrac{1}{x^2\,(x^2+1)} = \dfrac{A}{x^2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ | Nenhuma das anteriores.

3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\,(\ln x)^p}$

converge, quando $p \geq 1$. | diverge.

converge, quando $p < 1$. | Nenhuma das anteriores.

4. Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x}, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$, então o comprimento do gráfico de f entre os pontos cujas abcissas são 0 e 2, é definido por

$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx + \int_1^2 \sqrt{1+x}\,dx$ | $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 \sqrt{x}\,dx$

$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx + \int_1^2 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$ | Nenhuma das anteriores.

5. A série $3 + \dfrac{3}{4}(p-1) + \dfrac{3}{4^2}(p-1)^2 + \dfrac{3}{4^3}(p-1)^3 + \cdots$ converge quando

$0 < p < 2.$ | $-3 < p < 5.$

$-4 < p < 4.$ | Nenhuma das anteriores.