Universidade do Minho
Dep. de Matemática

LEInf
8/janeiro/2024
[Duração: 2 H]

Cálculo para Engenharia – Teste2

~~Nome completo~~:: PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Número::

Parte 1

Grupo I (10 valores): Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1. (4 valores) Calcule

(a) $\int e^x \cos(e^x)\,dx$. **(b)** $\int \arccos(x)\,dx$. **(c)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx$. **(d)** $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$; fazendo $t = e^x$.

a) $\int \underbrace{e^x}_{u'} . \underbrace{\cos(e^x)}_{\cos u}\,dx = \operatorname{sen} e^x + b;\ b \in \mathbb{R}$

b) $\int \arccos(x)\,dx = \int 1.\arccos(x)\,dx$ | Primitivação por partes: Fazendo $\begin{cases} u = \arccos(x) \\ v' = 1 \end{cases}$ tem-se $u' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e $v = x$

$= x.\arccos(x) - \int (-x)\ \underbrace{(1-x^2)}_{w}{}^{-1/2}\,dx = \quad \Rightarrow w' = -2x$

$= x.\arccos(x) - \frac{1}{2}\int(-2x).(1-x^2)^{-1/2}\,dx = x.\arccos(x) - \cancel{\frac{1}{2}}\frac{(1-x^2)^{-1/2+1}}{\cancel{-\frac{1}{2}+1}}$

$= x.\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + b;\ b \in \mathbb{R}$

c) $\int_{x=0}^{\pi/4} \operatorname{sen} x . \cos x\,dx = \int_{x=0}^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int_{x=0}^{\pi/4} 2.\operatorname{sen}(2x$

$= -\frac{1}{4}\cos(2x)\Big|_{x=0}^{\pi/4} = -\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -\frac{1}{4}.(-1) = \frac{1}{4}$

d) $\int_{x=0}^{1} \frac{1}{1+e^x}\,dx$. Fazendo $t = e^x$, tem-se $\frac{dt}{dx} = e^x \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{t}$ e para $x=0$, $t = e^0 = 1$ e para $x = 1$, $t = e^1 = e$

$\overset{\shortparallel}{\int_{t=1}^{e}} \frac{1}{1+t}.\frac{1}{t}\,dt = \int_{t=1}^{e}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \ln t - \ln(t+1)\Big|_{t=1}^{e}$

$= \ln\frac{t}{t+1}\Big|_{t=1}^{e} = \ln\frac{e}{e+1} - \ln\frac{1}{2}$

v.s.f.f.

2. **(1 valor)** Sabendo que $G(x) = 2 + \int_0^{3x} e^{-t^2}\,dt$, determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $G'(x) = \frac{3}{e^9}$.

$$G'(x) = \left(2 + \int_0^{3x} e^{-t^2} dt\right)' = \left(\int_0^{3x} e^{-t^2} dt\right)' = \left[F(3x)\right]';$$

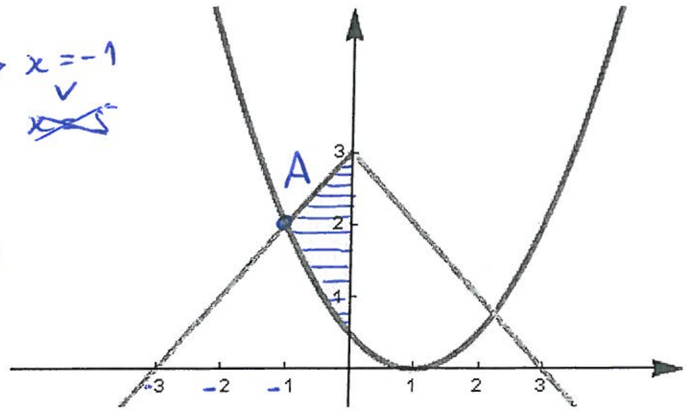
com $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \underset{\text{T.F. Cálculo}}{\Rightarrow} F'(x) = e^{-x^2}$.

Pelo teorema da derivada da função composta: $\left[F(3x)\right]' = 3e^{-9x^2}$

Donde $G'(x) = \frac{3}{e^9} \Leftrightarrow 3e^{-9x^2} = \frac{3}{e^9} \Leftrightarrow 9x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 1$

3. **(2.5 valores)** Considere $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}(x-1)^2 \le y \le -|x| + 3\right\}$, na figura.

Calcule a **área da região sombreada**.



A: (abcissa negativa) $\begin{cases} y = \frac{(x-1)^2}{2} \\ y = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee \cancel{x=5}$

(ramo da esquerda)

$\therefore$ Área $= \int_{x=-1}^{0} \left((x+3) - \frac{(x-1)^2}{2}\right) dx$

$$\left.\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2}\frac{(x-1)^3}{3}\right|_{x=-1}^{0}$$

$$\left(0 + 0 - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 3(-1) - \frac{1}{2}\frac{(-1-1)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2} - 3 + \frac{4}{3}\right) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

4. (2.5 **valores**) Segundo Grandi (Monge Italiano, 1671-1742) *"a soma de um número infinito de zeros é igual a $\frac{1}{2}$"* porque, por um lado,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1} = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+0+\cdots \qquad \text{(A)}$$

e, por outro lado,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ..., \text{ quando } x=1, \quad \text{é equivalente a} \quad \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}. \qquad \text{(B)}$$

(a) Identifique e corrija os erros evidenciados em ambas as afirmações, (A) e (B), deste 'paradoxo'.

(b) Estude a natureza de $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}$.

a) A: Numa série (soma com um número infinito de parcelas) não se verificam as propriedades das somas com um número finito de parcelas; nomeadamente a associatividade. Pelo que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1} \neq 0$$

B: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$ representa uma série geométrica cujo 1.º termo é 1 e cuja razão é $(-x)$. Ou seja, a soma dos $\underline{n}$ primeiros termos desta série é igual a $S_n = 1 \cdot \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}$ que converge, isto é, $\lim_{n\to+\infty}(-x)^n = 0$, quando $|x|<1$ e diverge nos outros casos, incluindo quando $x=1$. ~~Donde~~

b) $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ é uma série (alternada) tal que o limite da sucessão geradora, $u_n = (-1)^{n+1}$ não é um infinitésimo, condição suficiente para se concluir que a série diverge.

Grupo II (4 valores): Em cada uma das questões seguintes, assinale se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F). Não deve apresentar qualquer justificação.

Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

	V	F
1. $\forall x \in D_f, \ \displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{1}{x}\int x\,f(x)\,dx.$	○	●
2. $\displaystyle\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) + \int f'(x)\,g(x)\,dx.$	○	●
3. Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável, então $\left(\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\right) \in \mathbb{R}.$	●	○
4. Quando $x \in [1, +\infty[$, a área da região delimitada pelo eixo das abcissas e pela curva definida por $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ é finita.	●	○
5. Se $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (\lvert u_n\rvert + \lvert v_n\rvert)$ converge, então $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \lvert u_n\rvert$ também converge.	●	○

Grupo III (4 valores): Em cada uma das questões seguintes, assinale a única afirmação verdadeira. Não deve apresentar qualquer justificação.

Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

1. Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$. A soma de Riemann que melhor aproxima a área da região delimitada pelo gráfico de f, o eixo das abcissas e as retas verticais definidas por $x = a$, $x = b$ é

- ○ a soma à direita.
- ○ a soma à esquerda.
- ○ a soma superior.
- ● Nenhuma das anteriores.

2. No cálculo de $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\,(x^2+1)}$, a forma para a decomposição em frações parciais é

- ○ $\dfrac{1}{x^2\,(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$
- ○ $\dfrac{1}{x^2\,(x^2+1)} = \dfrac{A}{x^2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$
- ● $\dfrac{1}{x^2\,(x^2+1)} = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$
- ○ Nenhuma das anteriores.

3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\,(\ln x)^p}$

- ○ converge, quando $p \geq 1$.
- ● converge, quando $p < 1$.
- ○ diverge.
- ○ Nenhuma das anteriores.

4. Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x}, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$, então o comprimento do gráfico de f entre os pontos cujas abcissas são 0 e 2, é definido por

- ○ $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx + \int_1^2 \sqrt{1+x}\,dx$
- ● $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx + \int_1^2 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$
- ○ $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 \sqrt{x}\,dx$
- ○ Nenhuma das anteriores.

5. A série $3 + \dfrac{3}{4}(p-1) + \dfrac{3}{4^2}(p-1)^2 + \dfrac{3}{4^3}(p-1)^3 + \cdots$ converge quando

- ○ $0 < p < 2$.
- ○ $-4 < p < 4$.
- ● $-3 < p < 5$.
- ○ Nenhuma das anteriores.