

Nome

Número

I

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.

Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Seja $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Então

- $\inf A = 0$
 A é finito
 $\sup A = 1$
 $A' = \{0\}$

Questão 2. O conjunto $\{x \in \mathbb{R} : |x| < |x - 1|\}$ é o intervalo

- $[1, +\infty[$
 $] -\infty, \frac{1}{2}[$
 \mathbb{R}^-
 $] -\infty, \frac{1}{2}]$

Questão 3. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções. Se f é uma função par, então

- $f \circ g$ é uma função par
 $g \circ f$ é uma função ímpar
 $g \circ f$ é uma função par
 nenhuma das anteriores

Questão 4. Seja $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow]0, 1]$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

- $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$
 $f^{-1}(x) = x^2 + 1$
 $f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{x}}$
 nenhuma das anteriores

II

Em cada uma das questões seguintes, indique se cada uma das proposições é verdadeira ou falsa.

Cada resposta certa vale 0,5 valores e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Considere a sucessão de termo geral $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$.

V F

- a) $\frac{40}{21}$ é termo da sucessão $(a_n)_n$.
b) $(a_n)_n$ é uma sucessão monótona crescente.
c) $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq \frac{1}{2}$.
d) $(a_n)_n$ é uma sucessão divergente.

Questão 2.

V F

- a) Se uma sucessão é convergente, qualquer sua subsucessão é convergente.
- b) A série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \cos \frac{1}{n^2}$ é uma série convergente.
- c) Seja $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ uma série convergente. A série gerada por qualquer subsucessão de $(a_n)_n$ é uma série convergente.
- d) Se $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = 1$ então $\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 + a_n) = 2$.

III

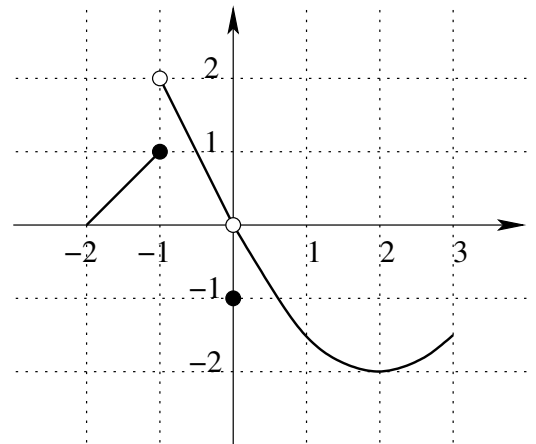
As respostas à questão deste grupo devem ser dadas na folha de enunciado e justificadas de forma breve.

Questão 1. [6 valores] Considere a função $f : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura anexa. No intervalo $]0, 3]$ o gráfico da função é um arco da parábola e os restantes elementos do gráfico de f são segmentos de reta ou pontos.

a) Classifique a função f quanto à injetividade.

b) Determine $f([-1, 0])$.

c) Determine $f^{-1}([1, 2])$.



d) Indique, caso existam, ou justifique porque não existem, os pontos de mínimo e máximo locais de f .

e) Indique, caso existam, ou justifique porque não existem, o mínimo e o máximo absolutos de f .

f) Apresente uma expressão analítica que permita calcular os valores de $f(x)$ para $x \in]0, 3]$.

As respostas deste grupo devem ser convenientemente justificadas.

Questão 1. [2 valores] Em cada uma das alíneas seguintes apresente um exemplo ou justifique porque não existe.

- a) Uma sucessão crescente convergente para zero.
- b) Uma série alternada absolutamente convergente.
- c) Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Q}$.
- d) Uma função $f : [0, 1] \rightarrow]0, 1]$ bijetiva.

Questão 2. [2 valores] Calcule $\lim_n \frac{n!}{n^n}$.

Questão 3. [2 valores] Estude a natureza da série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n+1)^n}{3^n n!}$.
