Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática

Cálculo

Licenciatura em Ciências da Computação

Teste 2 :: 16 de dezembro de 2025

Nome ______________________ Número __________

I

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ 0 < |x-3| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$. Então:

- ◯ f é contínua em 3;
- ◯ $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3$;
- ◯ f é a função identidade;
- ◯ f é a função constante igual a 3.

Questão 2. O valor de $\arccos\left(\cos \frac{5\pi}{7}\right)$ é

- ◯ $\frac{5\pi}{7}$
- ◯ $\frac{\pi}{7}$
- ◯ $\frac{2\pi}{7}$
- ◯ $-\frac{2\pi}{14}$

Questão 3. O valor de $\arccos\left(\operatorname{sen} \frac{8\pi}{7}\right)$ é

- ◯ $\frac{8\pi}{7}$
- ◯ $\frac{\pi}{7}$
- ◯ $-\frac{\pi}{7}$
- ◯ $\frac{9\pi}{14}$

Questão 4. Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(-1) = f(1) = -1$ e $f(0) = 0$. Então:

- ◯ f' tem pelo menos um zero
- ◯ f' nunca se anula
- ◯ f é crescente em $]-1,0[$ e decrescente em $]0,1[$
- ◯ nenhuma das respostas anteriores é verdadeira

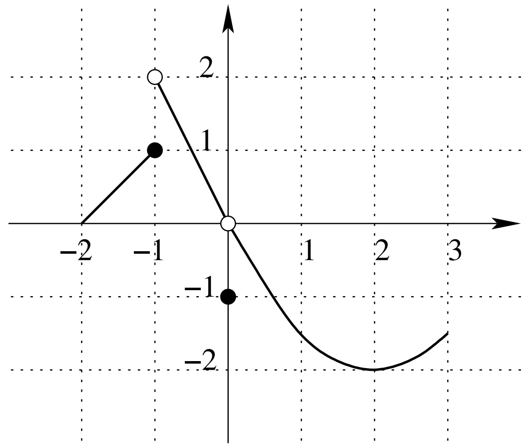
Questão 5. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função derivável cuja derivada nunca se anula. Então:

- ◯ f não tem mínimo nem máximo
- ◯ $f(x) \neq 0,\ \forall x \in [0,1]$
- ◯ f' é derivável
- ◯ f é monótona

As respostas à questão deste grupo devem ser dadas na folha de enunciado e justificadas de forma breve.

Questão 1. [4 valores] Considere a função $f : [-2,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura anexa. No intervalo $]0,3]$ o gráfico da função é um arco da parábola cuja equação é $y = \frac{x^2}{2} - 2x$ e os restantes elementos do gráfico de f são segmentos de reta ou pontos.

a) Indique o conjunto dos pontos onde f é descontínua.



b) Calcule, caso existam, $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$ e $f'(1)$.

c) Apresente uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

d) Indique o maior valor positivo para δ de modo a que seja verdadeira a implicação,

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \tfrac{1}{2}.$$

III

As respostas à questão deste grupo devem ser dadas na folha de enunciado e devem ser convenientemente justificadas.

Questão 1. [4 valores] Calcule, ou justifique que não existe, cada um dos seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x \operatorname{sen} x}$; *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{e^x - 1}$.

Questão 2. [4 valores] Considere as funções f e g definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in \mathbb{Z} \\ 1-x, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Identifique os pontos onde cada uma das funções f e g é contínua.

b) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

Questão 3. [3 valores] Mostre, recorrendo ao teorema de Lagrange, que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |\cos x - \cos y| \leq |x - y|$$