Cálculo de Programas

3.º Ano de LEI+MiEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2022/23

Teste — 13 de Janeiro de 2023, 14h00–16h00
Salas E1-0.04 + E1-0.08

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Questão 1 Recordando da biblioteca `Cp.hs` o isomorfismo $\mathsf{undistl} = [i_1 \times id, i_2 \times id]$, use diagramas para:

- descrever o tipo de $\mathsf{undistl}$;
- inferir a propriedade *natural* (ie. "grátis'") da função distl que é inversa de $\mathsf{undistl}$. (**NB:** tem de formular essa propriedade mas não se pede para a provar analiticamente.)

Questão 2 Sabendo que a igualdade

$$(p? + p?) \cdot p? \ = \ (i_1 + i_2) \cdot p? \tag{E1}$$

se verifica, demonstre a seguinte propriedade do condicional de McCarthy:

$$p \rightarrow (p \rightarrow a\ ,\ b)\ ,\ (p \rightarrow c\ ,\ d) \ = \ p \rightarrow a\ ,\ d \tag{E2}$$

Questão 3 Considere-se a função

$$h = \mathsf{for}\ loop\ (0, 1) \tag{E3}$$

onde $loop\ (a, b) = (b, a + b)$. Sabendo que

$$\mathsf{for}\ g\ i = (\!|\, [\underline{i}, g]\, |\!) \tag{E4}$$

e recorrendo à lei de recursividade mútua, deduza as definições *pointwise* das funções f e g tal que $h = \langle f, g \rangle$.

Questão 4 Mostre que o anamorfismo que calcula os sufixos de uma lista

$$suffixes = [\!(g)\!]\ \mathbf{where}\ g = (id + \langle \mathsf{cons}, \pi_2 \rangle) \cdot \mathsf{out}$$

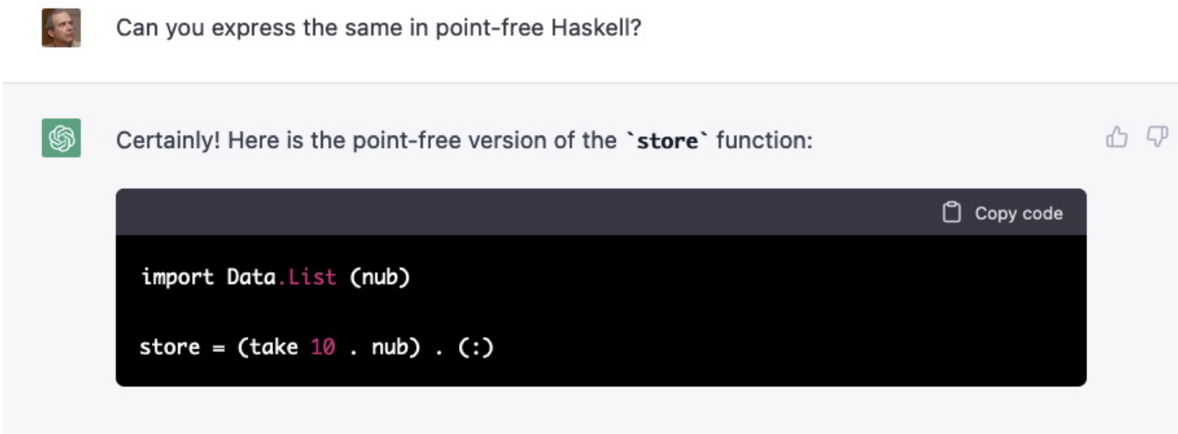
é a função:

$$\begin{array}{l} suffixes\ [\,] = [\,] \\ suffixes\ (h : t) = (h : t) : suffixes\ t \end{array}$$

Questão 5 Recorde o *problema do telemóvel antigo* que foi abordado na primeira ficha das aulas práticas desta disciplina:

(...) For each ***list of calls*** *stored in the mobile phone (eg. numbers dialed, SMS messages, lost calls), the* ***store*** *operation should work in a way such that* ***(a)*** *the more recently a* ***call*** *is made the more accessible it is;* ***(b)*** *no number appears twice in a list;* ***(c)*** *only the most recent 10 entries in each list are stored.*

Tendo-se pedido ao CHATGPT uma solução **pointfree** para estes requisitos, a resposta foi esta, para $store :: Eq\ a \Rightarrow a \rightarrow [a] \rightarrow [a]$:

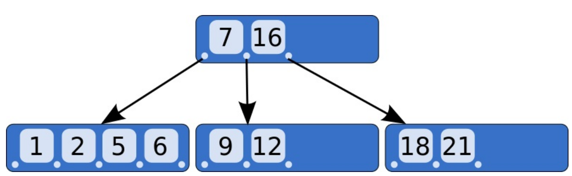


Apesar de impressionante, a resposta tem um erro (apenas!). Identifique-o e diga como se pode corrigir.[1]

Questão 6 Uma "B-tree" é uma generalização das árvores binárias do módulo BTree a mais do que duas sub-árvores por nó:

$$\mathbf{data}\ \mathsf{B\_tree}\ a = Nil \mid Block\ \{ leftmost :: \mathsf{B\_tree}\ a, block :: [(a, \mathsf{B\_tree}\ a)] \}$$

Por exemplo, a B-tree[2]



é representada no tipo acima por:

$t = Block\ \{$
$\quad leftmost = Block\ \{$

[1] CHATGPT usa a função nub, para a qual dá a seguinte explicação: *"In Haskell, the nub function is used to remove duplicate elements from a list. It returns a new list containing only the unique elements from the original list, in the order in which they first appear. For example, $nub\ [1,2,3,2,1]$ would return $[1,2,3]$".*

[2] Créditos: figura extraída de `https://en.wikipedia.org/wiki/B-tree`.

$$
\begin{array}{l}
\quad\quad \mathit{leftmost} = \mathit{Nil}, \\
\quad\quad \mathit{block} = [\,(1, \mathit{Nil}), (2, \mathit{Nil}), (5, \mathit{Nil}), (6, \mathit{Nil})\,]\,\}, \\
\quad \mathit{block} = [\\
\quad\quad (7, \mathit{Block}\ \{ \\
\quad\quad\quad \mathit{leftmost} = \mathit{Nil}, \\
\quad\quad\quad \mathit{block} = [\,(9, \mathit{Nil}), (12, \mathit{Nil})\,]\,\}), \\
\quad\quad (16, \mathit{Block}\ \{ \\
\quad\quad\quad \mathit{leftmost} = \mathit{Nil}, \\
\quad\quad\quad \mathit{block} = [\,(18, \mathit{Nil}), (21, \mathit{Nil})\,]\,\}) \\
\quad\quad]\,\}
\end{array}
$$

Identifique, justificando, o functor de base

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\mathsf{B}\ (X, Y) = \ldots \\
\mathsf{B}\ (f, g) = \ldots.
\end{array}
\right.
$$

que capta o padrão de recursividade da declaração de $\mathsf{B\_tree}$ dada acima, em Haskell, bem como o isomorfismo:

$$\mathsf{in} : \mathsf{B}\ (A, \mathsf{B\_tree}\ A) \rightarrow \mathsf{B\_tree}\ A.$$

Questão 7 Considere a seguinte definição

$$
\begin{array}{l}
\mathit{dups} :: (\mathit{Eq}\ a) \Rightarrow [\,a\,] \rightarrow \mathbb{B} \\
\mathit{dups}\ [\,] = \textsc{False} \\
\mathit{dups}\ (h : t) = h \in t \vee (\mathit{dups}\ t)
\end{array}
$$

de uma função que testa se uma lista contém elementos repetidos. Defina-a como um hilomorfismo identificando B e os genes f e g do diagrama seguinte:

$$
\begin{tikzcd}
A^* \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[d, "{[\![g]\!]}"'] \arrow[dd, bend right=60, "dups"'] & \mathsf{B}\ (\mathbb{B}, A^*) \arrow[d, "{\mathsf{B}\ (id, [\![g]\!])}"] \\
\mathbb{B}^* \arrow[r, bend left, "\mathsf{out}"] \arrow[d, "{(\!| f |\!)}"'] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathsf{B}\ (\mathbb{B}, \mathbb{B}^*) \arrow[l, bend left, "\mathsf{in}"] \arrow[d, "{\mathsf{B}\ (id, (\!| f |\!))}"] \\
\mathbb{B} & \mathsf{B}\ (\mathbb{B}, \mathbb{B}) \arrow[l, bend left, "f"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
&h = [\![f, g]\!] \\
&f = [\mathit{false}, \widehat{\vee}] \\
&g\ [\,] = i_1\ () \\
&g\ (h : t) = i_2\ (h \in t, t)
\end{aligned}
$$

$\square$

Questão 8 Pode mostrar-se que a seguinte variante do tipo "rose tree"

$$\mathbf{data}\ \mathsf{Rose}\ a = L\ a \mid R\ [\mathsf{Rose}\ a]$$

que tem por base $\mathsf{B}\ (f, g) = f + \mathsf{map}\ g$, forma um mónade

$$X \xrightarrow{u} \mathsf{Rose}\ X \xleftarrow{\mu} \mathsf{Rose}\ (\mathsf{Rose}\ X)$$

onde

$$u = L \tag{E5}$$

$$\mu = (\!|\, [id, \mathsf{in} \cdot i_2] \,|\!) \tag{E6}$$

Construa as funções in / out para este tipo e desenhe o diagrama dos seus catamorfismos. Com base nesse diagrama,

- Converta para Haskell com variáveis a componente μ do referido mónade.
- Mostre que a lei monádica $\mu \cdot u = id$ se verifica.

RESOLUÇÃO: Tem-se

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{in} = [L, R] \\
&\mathsf{out} \cdot L = i_1 \\
&\mathsf{out} \cdot R = i_2
\end{aligned}
$$

e, como

$$\mathsf{F}\ g = \mathsf{B}\ (id, g) = id + \mathsf{map}\ g$$

o diagrama correspondente a $k \cdot \mathsf{in} = g \cdot (id + \mathsf{map}\ k)$ iff $k = (\!|\, g \,|\!)$. Logo:

$$
\begin{aligned}
& \mu = (\!|\, [id, \mathsf{in} \cdot i_2] \,|\!) \\
\equiv & \quad \{ \text{ universal-cata (??) } \} \\
& \mu \cdot \mathsf{in} = [id, \mathsf{in} \cdot i_2] \cdot (id + \mathsf{map}\ \mu) \\
\equiv & \quad \{ \ \mathsf{in} = [L, R] \text{ , logo } \mathsf{in} \cdot i_2 = R \text{ ; absorção-+ (??) } \} \\
& \mu \cdot [L, R] = [id, R \cdot (\mathsf{map}\ \mu)] \\
\equiv & \quad \{ \text{ fusão-+ (??) ; Eq-+ (??) } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \mu \cdot L = id \\ \mu\ R = R \cdot (\mathsf{map}\ \mu) \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \text{ introdução de variáveis } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \mu\ (L\ a) = a \\ \mu\ (R\ x) = R\ ((\mathsf{map}\ \mu\ x)) \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

$\square$

A cláusula $\mu \cdot L = id$ acima é a lei $\mu \cdot u = id$ que se pede para provar. $\square$
