PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

Questão 1 Os tipos $\mathbb{B}$ e $1+1$ — onde $1 = \{()\}$ — são isomorfos, podendo a função out : $\mathbb{B} \to 1+1$ ser escrita em Haskell da seguinte maneira:

$$\begin{array}{l} \mathsf{out} : \mathbb{B} \to 1+1 \\ \mathsf{out}\ \textsc{False} = i_1\ () \\ \mathsf{out}\ \textsc{True} = i_2\ () \end{array}$$

Apresente uma definição, sem recorrer a variáveis, para a função in (inversa de out), derivada por cálculo analítico a partir da definição dada acima de out.

Questão 2 Considere a função

$$\alpha\ p = \mathsf{swap} \cdot (p \to \pi_1\ ,\ \pi_2)$$

Determine o tipo mais geral de $\alpha\ p$ e, a partir dele, a sua propriedade grátis.

Questão 3 Considere a estrutura de dados que se segue, estudada nas aulas:

Árvores com informação de tipo A nos nós :

$$\mathsf{T} = \mathsf{BTree}\ A \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{B}\ (X, Y) = 1 + X \times Y^2 \\ \mathsf{B}\ (g, f) = id + g \times f^2 \end{array} \right. \qquad \mathsf{in} = [\underline{Empty}\ , Node]$$

Haskell: **data** BTree a = *Empty* | *Node* $(a, (\mathsf{BTree}\ a, \mathsf{BTree}\ a))$

Defina como um catamorfismo a função

$$\begin{array}{l} f : \mathsf{BTree}\ A \to A^* \\ f = (\!|\, g \,|\!) \end{array}$$

tal que $f\ t$ seja o caminho a percorrer na árvore t para atingir o seu nó terminal mais à direita.

Questão 4 A função nr (= "*no repeats*") que se segue testa se uma lista tem elementos repetidos:

$$
\begin{array}{l}
nr : A^* \to \mathbb{B} \\
nr = \pi_2 \cdot aux \ \textbf{where} \\
\quad aux = \llparenthesis [m, \langle n, h \rangle] \rrparenthesis \\
\quad m \ \_ = ([\,], \textsc{True}) \\
\quad n = \mathsf{cons} \cdot (id \times \pi_1) \\
\quad h \ (a, (t, b)) = \neg \ (a \in t) \land b
\end{array}
$$

Resolva em ordem a f e g a equação

$$\langle f, g \rangle = aux \tag{E1}$$

entregando essas funções definidas sem recurso a quaisquer combinadores pointfree estudados na disciplina. **Sugestão**: use a lei de recursividade mútua.

Questão 5 Nas aulas teórico-práticas demonstrou-se o seguinte resultado sobre a composição de catamorfismos:

$$\llparenthesis g \rrparenthesis \cdot \llparenthesis \mathsf{in} \cdot k \rrparenthesis = \llparenthesis g \cdot m \rrparenthesis \quad \Leftarrow \quad m \cdot \mathsf{F}\, f = \mathsf{F}\, f \cdot k \tag{E2}$$

Use (E2) para provar a lei de absorção-cata:

$$\llparenthesis g \rrparenthesis \cdot \mathsf{T}\ h = \llparenthesis g \cdot \mathsf{B}\ (h, id) \rrparenthesis \quad .$$

NB: recordam-se as leis functoriais estendidas a bifunctores:

$$\mathsf{B}\ (id, id) = id \tag{E3}$$

$$\mathsf{B}\ (h \cdot f, k \cdot g) = \mathsf{B}\ (h, k) \cdot \mathsf{B}\ (f, g) \tag{E4}$$

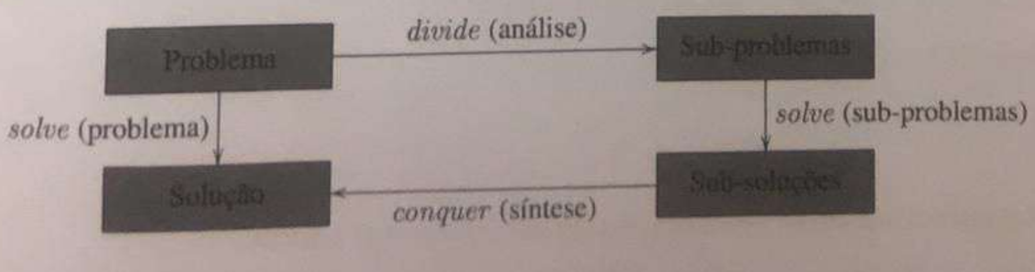
Questão 6 Considere a função:

$$
\begin{array}{l}
stake \ \_ \ [\,] = [\,] \\
stake \ 0 \ \_ = [\,] \\
stake \ y \ (x : t) \\
\quad \mid y \equiv x = [x] \\
\quad \mid y < x = [y] \\
\quad \mid y > x = x : stake \ (y - x) \ t
\end{array}
$$

$stake\ x\ y$ dá o maior prefixo de y cuja soma não excede x, truncando se necessário o último elemento. Por exemplo, $stake\ 5\ [1, 2] = [1, 2]$ e $stake\ 5\ [-1, 2, 6] = [-1, 2, 4]$.

Defina $divide$ tal que $\widehat{stake} = [\!(divide)\!]$ seja um anamorfismo de listas. Apoie a sua resolução num diagrama.

Questão 7 O desenho que se segue descreve a estratégia de programação conhecida por *divide & conquer*:



No Cálculo de Programas, esta estratégia é captada pelo conceito de *hilomorfismo*, definido como a composição

$$solve = (\!|\, conquer \,|\!) \cdot [\!(\, divide \,)\!] \tag{E5}$$

que se pode demonstrar ser tal que:

$$solve = conquer \cdot (\mathsf{F}\, solve) \cdot divide \tag{E6}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "divide"] \arrow[d, "solve"'] & \mathsf{F}A \arrow[d, "\mathsf{F}solve"] \\ B & \mathsf{F}B \arrow[l, "conquer"] \end{tikzcd}$$

Complete o raciocínio que se segue em que se converte (E5) em (E6):

$$
\begin{array}{ll}
 & solve = (\!|\, conquer \,|\!) \cdot [\!(\, divide \,)\!] \\
\equiv & \{ \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; \} \\
 & solve = conquer \cdot \mathsf{F}\, (\!|\, conquer \,|\!) \cdot \mathsf{out} \cdot [\!(\, divide \,)\!] \\
\equiv & \{ \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; \} \\
 & \vdots \\
\equiv & \{ \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; \} \\
 & solve = conquer \cdot \mathsf{F}\, solve \cdot divide
\end{array}
$$

Questão 8 Em qualquer monad T faz sentido definir a operação que emparelha cada elemento b de um seu habitante t com um determinado valor a:

$$str\; a\; t \;=\; do\, \{\, b \leftarrow t\, ;\, return(a, b)\, \} \tag{E7}$$

Mostre que (E7) e a definição *pointfree* (E8) que se segue coincidem:

$$str\; a \;=\; \mathsf{T}\, \langle \underline{a}, id \rangle \tag{E8}$$

Sugestão: recorde, das aulas práticas, o facto $\mathsf{T}\, f = (u \cdot f) \bullet id$.
