Cálculo de Programas

2.º Ano de LEI+MiEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2023/24

1º Teste — 26 de Outubro de 2023, 17h00–19h00
Salas (Edifício 2) 0.05 + 0.07 + 1.03 + 1.05

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

Questão 1 Resolva, em ordem a f e g, a equação

$$\underline{(x, y)} = \langle f, g \rangle \tag{E1}$$

onde $\underline{k}$ designa a função constante que dá sempre k qualquer que seja o seu argumento. **NB**: reduza f e g à sua expressão mais simples.

Questão 2 Considere a função

$$\alpha = (id + \mathsf{coswap}) \cdot \mathsf{coswap} \tag{E2}$$

onde $\mathsf{coswap} = [i_2, i_1]$. Calcule o tipo mais geral de α e formule a sua propriedade natural (grátis), a inferir através de um diagrama, como se explicou nas aulas.

Questão 3 Mostre que a equação em x

$$x \cdot \mathsf{distl} = [f\,, g] \times h \tag{E3}$$

só tem uma solução: $x = [f \times h\,, g \times h]$. **NB:** recorde que o isomorfismo distl tem $[i_1 \times id, i_2 \times id]$ como converso.

Questão 4 Considere a seguinte sessão no GHCi uma vez aberta a biblioteca $Cp.hs$:

```
*Cp> data T = Zero | One Int | Two (Int,Int)
*Cp> :t Zero
Zero :: T
*Cp> :t One
One :: Int -> T
*Cp> :t Two
Two :: (Int, Int) -> T
```

Tendo-se optado por definir

$$\mathsf{in} = [[\underline{Zero}\,, One]\,, Two]$$

identifique o tipo de in e calcule out a partir da equação $\mathsf{out} \cdot \mathsf{in} = id$.

Questão 5 Recordando a definição $\mathsf{join} = [id\,, id]$, prove a igualdade seguinte:

$$\langle \mathsf{join} \cdot (\pi_1 + \pi_1), \mathsf{join} \cdot (\pi_2 + \pi_2) \rangle = \mathsf{join}$$

Questão 6 Demonstrar

$$(p \rightarrow g\ ,\ h) \times f \quad = \quad p \cdot \pi_1 \rightarrow g \times f\ ,\ h \times f$$

a partir das leis do condicional de McCarthy e do facto seguinte:

$$q \rightarrow f\ ,\ f \quad = \quad f \tag{E4}$$

Questão 7 Sejam dadas as seguintes definições de operadores sobre listas:

$$\mathsf{cons}\ (h, t) = h : t \tag{E5}$$

$$\mathsf{nil}\ \_ = [\,] \tag{E6}$$

$$\mathsf{in} = [\mathsf{nil}\,, \mathsf{cons}] \tag{E7}$$

$$\mathsf{rcons}\ (h, t) = t +\!\!+ [h] \tag{E8}$$

Mostre que definir

$$\left\{ \begin{array}{l} invert\ [\,] = [\,] \\ invert\ (a : x) = invert\ x +\!\!+ [\,a\,] \end{array} \right.$$

é a mesma coisa que escrever, sem variáveis:

$$invert \cdot \mathsf{in} = [\mathsf{nil}, \mathsf{rcons} \cdot (id \times invert)]$$

Questão 8 Sendo válida a propriedade

$$\mathsf{ap} \cdot \langle \underline{k}, id \rangle = k \tag{E9}$$

apresente justificações para a demonstração que se segue da igualdade $\overline{f}\ a = f \cdot \langle \underline{a}, id \rangle$:

$$\begin{array}{cl} & \overline{f}\ a = f \cdot \langle \underline{a}, id \rangle \\ \equiv & \quad \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \} \\ & \overline{f}\ a = \mathsf{ap} \cdot (\overline{f} \times id) \cdot \langle \underline{a}, id \rangle \\ \equiv & \quad \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \} \\ & \overline{f}\ a = \mathsf{ap} \cdot \langle \underline{\overline{f}\ a}, id \rangle \\ \equiv & \quad \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \} \\ & \textsc{True} \\ \Box & \end{array}$$

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$
\begin{array}{ll}
& \overline{f}\ a = f \cdot \langle \underline{a}, id \rangle \\
\equiv & \quad \{ \text{ cancelamento (36) } \} \\
& \overline{f}\ a = \mathsf{ap} \cdot (\overline{f} \times id) \cdot \langle \underline{a}, id \rangle \\
\equiv & \quad \{ \text{ absorção-}\times\text{ (11) ; constante (4) ; natural-id (1) } \} \\
& \overline{f}\ a = \mathsf{ap} \cdot \langle \underline{\overline{f}\ a}, id \rangle \\
\equiv & \quad \{ \text{ (E9) } \} \\
& \textsc{True}
\end{array}
$$

□