→ Estatística Aplicada - Ficha 2

1-

- Uma função pode servir como função de probabilidade de uma v.a se:
  - $f(x) \geq 0$ para qualquer valor do seu domínio
  - $\sum f(x) = 1$ onde o somatório se estende a todos os valores no seu domínio

a) $f(4) = -0{,}25 < 0$ logo ñ pode

$f(1)+f(2)+f(3) > 1$

b) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1$

$f(1), f(2), f(3), f(4) \geq 0$ } logo [...] v.a

c) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = \frac{18}{19} < 1$ } logo ñ pode ser f p de uma v.a

dúvidas: 2d) ; 5/6

- falta fazer o 11
- meia dúvida: ~~3c)~~, 14 P(X>X) [...]

- função probabilidade de uma v.a
- função probabilidade acumulada
- função distribuição acumulada

2-

a) $f(x) = \frac{x-2}{5}$ $x = 1,2,3,4,5$

$f(1) = \frac{1-2}{5} = -\frac{1}{5} < 0$ logo ñ p[...]

b) $f(x) = \frac{x^2}{30}$ $x = 0,1,2,4$

$f(0) = 0 \geq 0$

$f(2) = \frac{4}{30} \geq 0$

$f(1) = \frac{1}{30} \geq 0$

$f(4) = \frac{16}{30} \geq 0$

$f(0)+f(1)+f(2)+f(4) = \frac{21}{30} < 1$ logo ñ pode ser f.p de uma v.a

c) $f(x) = \frac{1}{5}$ $x = 0,1,2,3,4,5$

$f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = \dots = \frac{1}{5} \geq 0$ $\sum_{x=0}^{5} f(x) = \frac{6}{5} > 1$ logo ñ pode ser f.p de v.a

d) $f(x) = c\left(\frac{1}{4}\right)^x \quad x = 1, 2, 3, \dots$

depende do c.

3-

a) $F(1) = 0{,}3 \quad F(2) = 0{,}5 \quad F(3) = 0{,}1 \quad F(4) = 1{,}2$

Como $F(4) > 1$ F ñ pode ser uma f.d.a

b) F ñ pode ser decrescente

Como $F(1) > F(2)$ mesmo $2 > 1$, F ñ pode ser f.d.a

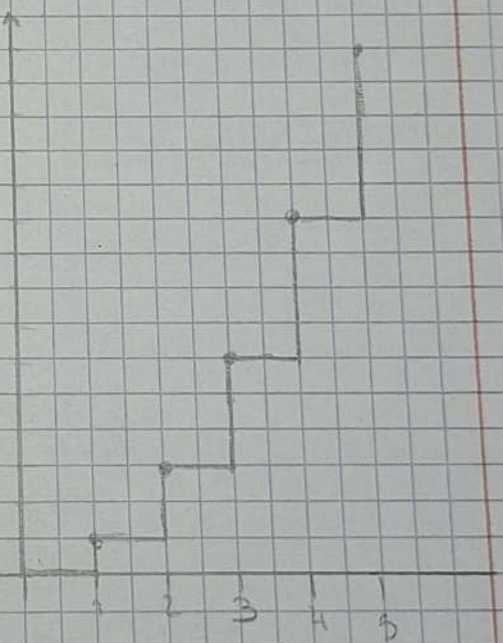
c) $F(1) < F(2) < F(3) < F(4)$ logo é crescente e $F(4) = 1$

→ coloca os contos

4-

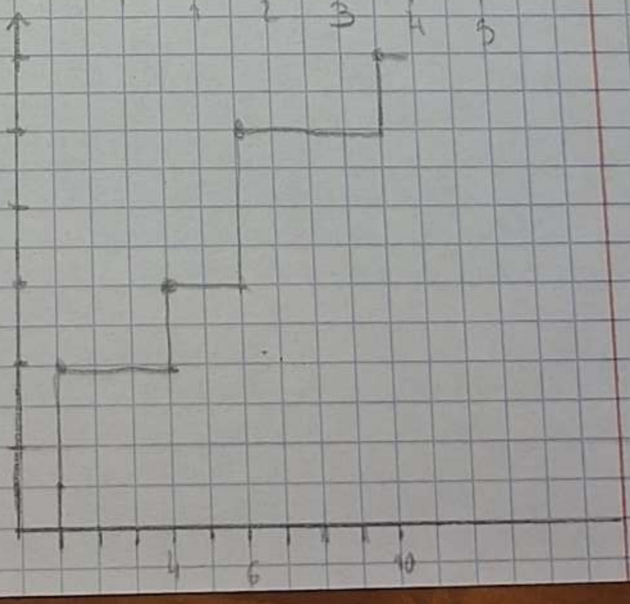
$f(x) = \frac{x}{15} \quad x = 1, 2, 3, 4, 5$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1/15 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 3/15 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 6/15 & \text{se } 3 \leq x < 4 \\ 10/15 & \text{se } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$



5-

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 2/6 & \text{se } 1 \leq x < 4 \\ 3/6 & \text{se } 4 \leq x < 6 \\ 5/6 & \text{se } 6 \leq x < 10 \\ 1 & \text{se } x \geq 10 \end{cases}$$



5-

[illegible] a) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

$P(2 < X \leq 6) = F(6) - F(2) = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) $P(X = 4) = 1/2$

c) $f(x)$

x	0	1	4	6	10
$f(x)$	0	$1/3$	$1/2$	$\frac{1}{3}$	$1/6$

⚠ distinção entre funções discretas e contínuas

- se dado x, por ex $x = 1, 2, 3, 4$ então é discreta
- densidade prob. é contínua

saiu no teste!!! 6-

- $P(X \leq 3) = 3/4$
- $P(X = 3) = 1/4$
- $P(X < 3) = \frac{1}{4}$

- $P(-0,4 < X < 4) = P(X < 4) - P(X \leq -0,4) = P(X \leq 3) - P(X \leq -0,4)$
$= F(3) - F(-0,4) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$
$= \frac{1}{2}$

- $P(X = 5) = 1/4$

- $f(x)$

x	-1	1	3	5
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

7-

a) $f(x) = c\,x \qquad x = 1, 2, 3, 4, 5$

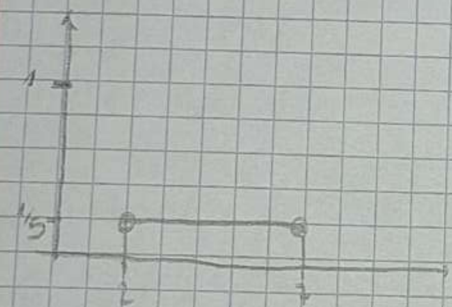
$c = \frac{1}{15}$

b)

8-

a)

$$f(x) = \begin{cases} 1/5 & 2 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$



$\frac{1}{5} \cdot 5 = 1$

→ Função densidade de Probabilidade

• Uma função com valores de $f(x)$ definidos sobre o conjunto de todos os números reais, é chamada uma função densidade de probabilidade de uma variável contínua X, sse x.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

para quaisquer constantes reais a e b com $a \leq b$

b)

$$P(3 \leq X \leq 7) = \int_3^7 \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\left[x\right]_3^7 = \frac{4}{5}$$

c)

• Para $x \leq 2 \quad F(x) = 0$

• Para $2 \leq x \leq 7$, $F(x) = \int_2^x \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\left[x\right]_2^x = \frac{x-2}{5}$

• Para $x > 7$, $F(x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{x-2}{5} & \text{se } 2 \leq x \leq 7 \\ 1 & \text{se } x > 7 \end{cases}$$

$$F(3 \leq X \leq 7) = F(7) - F(3) = 1 - \frac{3-2}{5} = \frac{4}{5}$$

9.- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+1) & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$

a) $P(X < 3.2) = \int_2^{3,2} \frac{1}{8}(x+1) = \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_2^{3,2} = \frac{1}{8}\left(\frac{3,2^2}{2} + 3,2 - (2+2)\right)$

$= 0,54$

$P(2.9 \leq X \leq 3.2) = \int_{2.9}^{3,2} \frac{1}{8}(x+1) = \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{2.9}^{3,2} =$

$= \frac{1}{8}\left(\left(\frac{(3,2)^2}{2} + 3,2\right) - \left(\frac{(2,9)^2}{2} + 2,9\right)\right) = 0,1519$

b)

- Para $x \leq 2$, $F(x) = 0$
- Para $2 \leq x \leq 4$ $F(x) = \int_2^x \frac{1}{8}(x+1) = \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_2^x = \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2} + x - 4\right)$

$= \frac{1x^2}{16} + \frac{1x}{8} - \frac{1}{2}$

- Para $x > 4$, $F(x) = 1$

$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{x}{8} - \frac{1}{2} & 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$

$P(X > 3,2) = F(x = 3,2) = \frac{3,2^2}{16} + \frac{3,2}{8} - \frac{1}{2} = 0,54$

$P(2,9 < X < 3,2) = P(3,2) - P(2,9) = \left(\frac{3,2^2}{16} + \frac{3,2}{8} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2,9^2}{16} + \frac{2,9}{8} - \frac{1}{2}\right)$

$= 0,1519$

10-

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}} & 0 < x < 4 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4\sqrt{x}} \quad 0 < x < 4$$

a) $c = ?$

$$\int_0^4 \frac{c}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow c \times \left[2\sqrt{x}\right]_0^4 = 1 \Leftrightarrow c \times \left(2\sqrt{4} - 0\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{4}$$

b) $P(X < 1/4) = \int_0^{1/4} \frac{1}{4} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}\left[2\sqrt{x}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{\frac{1}{4}} - 0\right) = \frac{1}{4}$

$P(X > 1) = 1 - P(X < 1) \Rightarrow 1 - \int_0^1 \frac{1}{4} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - \left(\frac{1}{4}\left[2\sqrt{x}\right]_0^1\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

c)

- Para $X \leq 0$ $F(x) = 0$
- Para $0 < x < 4$ $F(x) = \int_0^x \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}\left[2\sqrt{x}\right]$
- Para $x \geq 4$, $F(x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{4}(2\sqrt{x}) & \text{se} \quad 0 < x \leq 4 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 4 \end{cases}$$

$F(X < 1/4) = F(X = \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$

$F(X > 1) = 1 - F(X < 1) = \frac{1}{2}$

12.

$$f(x) = \begin{cases} Kx(1-x) & 0<x<1 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases} \Rightarrow 6(x-x^2) \quad 0<x<1$$

a)

$$\int_0^1 f(x) = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 Kx(1-x) = 1 \Rightarrow K\int_0^1 x - x^2 = 1$$

$$= K\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 \Rightarrow K\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow K\frac{1}{6} = 1 \Rightarrow K = 6$$

b)

$$P(X < 1/4) = \int_0^{1/4} 6(x-x^2) = 6\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{32} \approx 0{,}15625$$

$$P(X > 1/2) = 1 - P(X < 1/2) = 1 - \int_0^{1/2} 6(x-x^2) = 1 - \left(6\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

c)

- Para $x \leq 0$, $F(x) = 0$
- Para $0 < x < 1$, $F(x) = 6\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]$
- Para $x \geq 1$, $F(x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

13-
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{(x+1)}{2} & -1 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

$$\left(\frac{(x+1)}{2}\right)' = \frac{(x+1)' \times 2 - \overbrace{2' \times (x+1)}^{0}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(-1/2 < X < 1/2) = P(1/2) - P(-1/2) = \frac{3/2}{2} - \frac{1/2}{2} = \frac{1}{2}$$

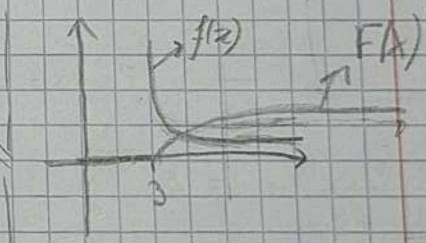
$$P(2 < X < 3) = P(3) - P(2) = 1 - 1 = 0$$

14-
$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{9}{x^2} & x > 3 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases} \Rightarrow f(x) \begin{cases} \frac{18}{x^3} & x > 3 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

$$\left(1 - \frac{9}{x^2}\right)' = 0 - \left(\frac{9}{x^2}\right)' = + \left(\frac{\overbrace{9' \times x^2}^{0} - (9 \times (x^2)')}{x^4}\right) = \frac{18}{x^3}$$

$$P(X \leq 5) = \frac{16}{25} \approx 0{,}64$$

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) = \frac{9}{64} \approx 0{,}140625$$



11-
$$f(x) = \begin{cases} Kxe^{-x^2} & x \geq 0 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} Kxe^{-x^2} = 1 \Leftrightarrow K \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} = 1 \Leftrightarrow -\frac{K}{2} \int_0^{+\infty} -2xe^{-x^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{K}{2} \left[e^{-x^2} \right]_0^{+\infty} = 1 \Leftrightarrow -\frac{K}{2} (0 - 1) = 1 \Leftrightarrow \frac{K}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow K = 2$$