→ Estatística aplicada - Ficha 5

1-

f.d.p variável aleatória X

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right) & x \geq 0 \text{ e } \theta > 0 \\ 0 & \text{, nos outros casos} \end{cases}$$

- $T = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 / 2n$

- Sabemos que X_i^2 é uma variável aleatória, a soma de variáveis independentes X_i^2 resulta na soma dos seus esperanças, logo:

$$E[T] = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} E[X_i^2] = \frac{1}{2n} \times n \times E[X^2] = \frac{1}{2} E[X^2]$$

- $E[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 f(x;\theta)\,dx = \int_0^{\infty} x^2 \times \frac{x}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right) dx$

$\Leftrightarrow E[X^2] = 2\theta^2$

- $E[T] = \frac{1}{2} \times 2\theta^2 = \theta^2$

- A tendência é: $t_T(\theta) = E[T] - \theta^2$

$= \theta^2 - \theta^2 = 0$

- para o estimador ser n̄ tendencioso, $E[W_i] = \mu$.

- Quando dois estimadores são n̄ tendenciosos, é preferível aquele que tem <u>menor</u> variância

2-

- $W_1 = 1/4\,(X_1 + X_2) + 1/2\,X_3$
- $W_2 = 1/4\,(\ldots$
- $W_3 = 0{,}3(X_1 + X_2) + 0{,}4X_3$

- $W_1 = \frac{1}{4}(X_1 + X_2) + 1/2\,X_3$

$$E[W_1] = \frac{1}{4}\left(E[X_1] + E[X_2]\right) + \frac{1}{2}E[X_3] = \frac{1}{4}(\mu + \mu) + \frac{1}{2}\mu = \frac{2\mu}{4} + \frac{2\mu}{4} = \mu$$

Logo, W_1 é n̄ tendencioso

$E[W_2] = \frac{1}{4}(E[X_1] + E[X_2] + E[X_3]) = \frac{1}{4}(\mu + \mu + \mu) = \frac{3\mu}{4}$

Logo, W_2 é tendencioso

$E[W_3] = 0,3(E[X_1] + E[X_2]) + 0,4(E[X_3]) = 0,3(2\mu) + 0,4\mu = \mu$

Logo W_3 é ñ tendencioso

b)

- $Var(W_1) = Var\left(\frac{1}{4}(X_1 + X_2) + \frac{1}{2}X_3\right)$

$$= \frac{1}{16} Var[X_1] + \frac{1}{16} Var[X_2] + \frac{1}{4} Var[X_3]$$

$$= \frac{1}{16}\theta^2 + \frac{1}{16}\theta^2 + \frac{1}{4}\theta^2 = \frac{3\theta^2}{8}$$

- $Var(W_2) = Var\left(\frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3)\right) = \frac{1}{16}\left(Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3)\right) =$

$= \frac{1}{16}(\theta^2 + \theta^2 + \theta^2) = \frac{3\theta^2}{16}$

- $Var(W_3) = Var(0,3(X_1 + X_2) + 0,4(X_3))$

$$= 0,09\,(Var(X_1) + Var(X_2)) + 0,16\,Var(X_3)$$

$$= 0,09\,(2\theta^2) + 0,16\,\theta^2 = (0,18 + 0,16)\theta^2 = 0,34\theta^2$$

c) $Ef(W_1, W_3) = \frac{Var(W_1)}{Var(W_3)} = \frac{\frac{3\theta^2}{8}}{0,34\theta^2} \approx 1,10$

3-

média μ: • $T_1 = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$

• $T_2 = \dfrac{X_1 + 2X_2 + X_3}{4}$

• $E[X]$

$E[T_1] = \dfrac{E[X_1] + E[X_2] + E[X_3]}{3} = \dfrac{\mu + \mu + \mu}{3} = \mu$ logo é ñ tendencioso

$E[T_2] = \dfrac{E[X_1] + 2E[X_2] + E[X_3]}{4} = \dfrac{\mu + 2\mu + \mu}{4} = \mu$ logo tmb é ñ tendencioso

• $Va[X]$

$Va[T_1] = \dfrac{Va[X_1] + Va[X_2] + Va[X_3]}{9} = \dfrac{3\sigma^2}{9} = \dfrac{1}{3}\sigma^2$

$Va[T_2] = \dfrac{Va[X_1] + 2Va[X_2] + Va[X_3]}{16} = \dfrac{6\sigma^2}{16} = \dfrac{3\sigma^2}{8}$

• Eficiência

$\dfrac{Va(T_2)}{Va(T_1)} = \dfrac{\frac{3\cancel{\sigma^2}}{8}}{\frac{\cancel{\sigma^2}}{3}} = \dfrac{9}{8}$

• Como T_1 tem uma variância menor é mais eficiente que T_2

4-

- $T_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i$

- $T_2 = \frac{1}{n-n_1} \sum_{i=n_1+1}^{n} X_i$

- $T = \frac{T_1 + T_2}{2}$

a)

- T_1 é não tendencioso logo é centrado

$$E[T_1] = E\left(\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i\right) = \frac{1}{n_1} \times \sum_{i=1}^{n_1} E[X_i] = \frac{1}{n_1} \times n_1 \times \mu = \mu$$

- T é não tendencioso, isto é, centrado

$$E[T] = E\left(\frac{T_1+T_2}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \left(\underset{\mu}{E[T_1]} + \underset{\mu}{E[T_2]}\right) = \frac{1}{2} \times (2\mu) = \mu$$

- $E[T_2] = E\left(\frac{1}{n-n_1} \sum_{i=n_1+1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n-n_1} \sum_{i=n_1+1}^{n} E[X_i] = \frac{(n-n_1)\mu}{n-n_1} = \mu$

$\hookrightarrow n-(n_1+1)+1$

b)

- $Var(T_1) = \frac{\sigma^2}{n_1}$

- $Var(T_2) = \frac{\sigma^2}{n-n_1}$

- $Var(T) = \frac{1}{4} \times (Var(T_1) + Var(T_2))$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n-n_1}\right) = \frac{\sigma^2}{4}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n-n_1}\right)$$

- Para T_1 ser mais eficiente que T, $Var(T_1) < Var(T)$

$$\frac{\sigma^2}{n_1} < \frac{\sigma^2}{4}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n-n_1}\right) \Leftrightarrow \Rightarrow \frac{1}{n_1} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n-n_1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{n_1} < \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n-n_1} \Leftrightarrow \frac{3}{n_1} < \frac{1}{n-n_1} \Leftrightarrow 3(n-n_1) < n_1 \Rightarrow 3n - 3n_1 < n_1$$

$$\Rightarrow 3n < 4n_1 \Rightarrow n_1 > \frac{3n}{4}$$

5.

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x & 0 < x < 1, \text{ com } \theta > 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_0^1 x(\theta+1)x\, dx = (\theta+1)\int_0^1 x^2\, dx$$

$$= (\theta+1)\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = (\theta+1)\times\frac{1}{3} = \frac{\theta+1}{3}$$

b)

- $T_1 = \bar{X}$
- $T_2 = -2 + \frac{1-\bar{X}}{2}$

- $E[T_1] = E[\bar{X}] = E[X] = \frac{\theta+1}{3} \neq \theta$ logo ñ é centrado para θ

- $E[T_2] = -2 + \frac{1-E[\bar{X}]}{2} = -2 + \frac{1-E[X]}{2} =$

$$= -2 + \frac{1-\frac{\theta+1}{3}}{2} = -2 + \frac{3-\theta-1}{6} = \frac{-2}{1}\times 6 + \frac{2-\theta}{6} = \frac{10-\theta}{6} \neq \theta$$

logo ñ é centrado para θ