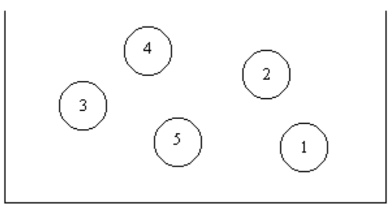
ESPERANÇA MATEMÁTICA

Esperança Matemática

Exemplo

Considere uma urna que contem 5 fichas idênticas, numeradas de 1 a 5. As fichas são mexidas de forma aleatória e é retirada uma, sendo registado o seu valor, após o que é novamente introduzida na urna. O jogo é repetido 25 vezes. Qual o valor esperado da soma dos valores registados em cada ficha retirada?



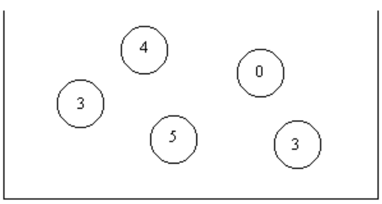
Esperança Matemática

- Probabilidade de sair um número = 1/5
- Soma das 5 fichas = 15
- Valor esperado de uma ficha = 3
- Repetindo o processo 25 vezes, valor esperado da soma dos valores registados em cada ficha retirada é 25*3=75

Esperança Matemática

Exemplo

Considere o exemplo anterior, agora com as fichas apresentadas na figura. Qual o valor esperado da soma dos valores registados em cada ficha retirada?



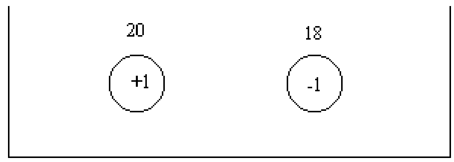
Esperança Matemática

Exemplo

No jogo da roleta existem 36 números, inscritos, alternadamente, em casas vermelhas e negras. Além destes 36 números existem ainda duas casas, de cor verde, com 0 e 00 inscritos. Neste jogo existe a possibilidade de apostar na cor negra (18) ou na cor vermelha (18). A ocorrência da cor escolhida dá direito a um prémio igual ao montante apostado. Caso ocorra uma das casas verdes, a banca recolhe tudo o que está em cima das mesas, isto é, nenhuma aposta sai vitoriosa. Suponha que um jogador pode apostar exactamente 1000 unidades monetárias e o decide fazer na cor preta. Calcule o valor esperado do ganho por parte da banca.

Esperança Matemática

Exemplo



$$E[X] = (-1)\frac{18}{38} + (+1)\frac{20}{38} = \frac{2}{38} = 0.055$$

7

Valor Esperado

Definição:

Se o acontecimento cujo resultado é *X* for realizado muitas vezes, então a média de todos os resultados será aproximadamente igual a *E(X)*

8

Valor Esperado

- Se X é uma variável aleatória discreta e $f(x)$ o valor da sua distribuição de probabilidade em x, o valor esperado da variável aleatória

$$E[X] = \sum_{x} x\, f(x)$$

- Se X é uma variável contínua e $f(x)$ o valor da sua função densidade de probabilidade em x, o valor esperado da variável aleatória

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Valor Esperado

Exemplo

Um conjunto de 12 televisores contém 2 com defeito. Deste conjunto, 3 são escolhidos aleatoriamente. Quantos televisores com defeito são esperados?

x	0	1	2
f(x)	6/11	9/22	1/22

$$f(x) = \frac{C_x^2 C_{3-x}^{10}}{C_3^{12}} \qquad x = 0, 1, 2$$

$$E[X] = 0\frac{6}{11} + 1\frac{9}{22} + 2\frac{1}{22} = \frac{1}{2}$$

Valor Esperado

- Se X é uma variável aleatória discreta e $f(x)$ o valor da sua distribuição de probabilidade em x, o valor esperado da variável aleatória $g(X)$ é

$$E\left[g(X)\right]=\sum_{x} g(x)f(x)$$

- Se X é uma variável aleatória contínua e $f(x)$ o valor da sua função densidade de probabilidade em x, o valor esperado da variável aleatória $g(X)$ é

$$E\left[g(X)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$$

11

Propriedades

1. $E\left[aX+b\right]=aE\left[X\right]+b \qquad a,b$ constantes

$E[X+Y]=E[X]+E[Y]$ $\qquad E[aX]=aE[X]$

$E[X-Y]=E[X]-E[Y]$ $\qquad E[a]=a$

2. $E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i g_i(X)\right]=\sum_{i=1}^{n} c_i E\left[g_i(X)\right] \qquad c_i$ constantes

12

Variância

- Se X é uma variável aleatória discreta e $f(x)$ o valor da sua distribuição de probabilidade em x, a variância da variável aleatória

$$\sigma^2 = Var\left[X\right] = \sum_x \left(x-\mu\right)^2 f\left(x\right)$$

- Se X é uma variável contínua e $f(x)$ o valor da sua função densidade de probabilidade em x, a variância da variável aleatória

$$\sigma^2 = Var\left[X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x-\mu\right)^2 f\left(x\right) dx$$

Variância

$$\sigma^2 = Var\left[X\right] = E[X^2] - \left(E[X]\right)^2$$

$$Var[X] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = \sum_x \left(x^2 - 2x\mu + \mu^2\right) f(x) =$$

$$= \textstyle\sum_x x^2 f(x) - 2\mu \sum_x x\, f(x) + \mu^2 \sum_x f(x) =$$

$$= E\left[X^2\right] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 . 1 =$$

$$= E\left[X^2\right] - (E[X])^2 \text{ c.q.d.}$$

Propriedades

1. $Var\left[aX+b\right]=a^2Var\left[X\right]$ $\quad a,b$ constantes

$Var[aX]=a^2Var[X]$

$Var[a]=0$

2.

$$Var\left[X_1\pm X_2\right]=Var\left[X_1\right]+Var\left[X_2\right]\pm 2Cov\left[X_1,X_2\right]$$

$$Cov\left[X_1,X_2\right]=E\left[\left(X_1-\mu_1\right)\left(X_2-\mu_2\right)\right]=E\left[X_1X_2\right]-E\left[X_1\right].E\left[X_2\right]$$

$Var[X\pm Y]=Var[X]+Var[Y]$ se X e Y são v.a. independentes