Elementos de Probabilidades - Folha 1

1. Para cada uma das experiências aleatórias abaixo indicadas, indentifique o espaço amostral, dê exemplos de acontecimentos (pelo menos um elementar e um composto, que não seja o universal) e identifique os correspondentes subconjuntos do espaço amostral. Calcule ainda a probabilidade de cada um dos acontecimentos que indicou.

   (a) Lançamento de uma moeda equilibrada duas vezes consecutivas;

   (b) Lançamento de uma moeda seguido do lançamento de um dado, ambos equilibrados;

   (c) Lançamento de um dado equilibrado três vezes consecutivas.

   Para cada uma das experiências dê ainda exemplos de dois acontecimentos disjuntos (ambos diferentes de $\varnothing$).

2. Considere a experiência aleatória que consiste em lançar um dado viciado em que a probabilidade de sair face i é o dobro da probabilidade de sair a face $i-1$, i, $i=2,\ldots,6$. Seja A o acontecimento "saiu uma face par", B o acontecimento "saiu uma face com um número múltiplo de 3" e C o acontecimento "saiu uma face ímpar".

   (a) Identifique o espaço amostral desta experiência e determine a probabilidade de cada um dos acontecimentos elementares.

   (b) Pode usar a probabilidade de Laplace para o cálculo de probabilidades de acontecimentos decorrentes desta experiência? Justifique.

   (c) Identifique os subconjuntos do espaço amostral correspondentes aos acontecimentos A, B, $\overline{B}$, C, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B\equiv A\cap\overline{B}$, $A\cup B\cup C$ e determine as respetivas probabilidades.
   Obs.: $\overline{B}$ denota o complementar de B, i.e., $\overline{B}=\{\omega\in\Omega:\omega\notin B\}$. É o subconjunto de Ω formado pelos elementos que não pertencem a B.

3. Considere a experiência aleatória que consiste em extrair, ao acaso e sem reposição, 3 bolas de uma caixa que contém 2 bolas brancas e 3 bolas vermelhas.

   (a) Identifique os acontecimentos:

   i. "todas as bolas extraídas são brancas";
   ii. "não saiu qualquer bola vermelha";
   iii. "saiu pelo menos uma bola vermelha";
   iv. "saíram no máximo duas bolas brancas".

   (b) Considere os seguintes acontecimentos:

   - A: "a primeira bola extraída é branca";
   - B: "a segunda bola extraída é branca";
   - C: "a terceira bola extraída é branca".

   Escreva os acontecimentos abaixo indicados usando operações entre A, B e C:

   i. D: "as duas primeiras bolas são brancas";
   ii. E: "as duas últimas bolas são brancas";
   iii. F: "saiu pelo menos uma bola branca";
   iv. G: "não saiu qualquer bola branca";
   v. H: "saiu uma e uma só bola branca'.

4. Durante um surto epidémico, 20% da população de uma cidade contraiu a doença em causa. Um ano mais tarde, há um novo surto epidémico, com a mesma incidência de 20%, e verificou-se que 8% da população da cidade contraiu a doença em ambos os surtos. Escolheu-se um indivíduo ao acaso nesta população. Qual a probabilidade de o indivíduo:
   (a) ter contraído a doença em pelo menos um dos surtos?
   (b) nunca ter contraído a doença?
   (c) ter contraído a doença apenas no segundo surto?
   (d) indivíduo ter contraído a doença em apenas um dos surtos?
5. São conhecidas as seguintes percentagens relativas à utilização (ou não) de três medicamentos distintos, A, B e C, recomendados para o tratamento de uma doença numa certa população:

10%	toma A;	40%	toma B;	20%	toma C;
5%	toma A e B;	4%	toma A e C;	15%	toma B e C;
2.5%	toma A, B e C		.		

   Determine a probabilidade de um indivíduo, escolhido ao acaso nesta população,
   (a) tomar pelo menos um dos três medicamentos;
   (b) não tomar qualquer medicamento;
   (c) tomar os medicamentos A e B, mas não tomar o medicamento C;
   (d) tomar apenas o medicamento A;
   (e) tomar um e um só dos 3 medicamentos.
6. Numa dada população, certa doença está presente sob a forma grave em 5% dos indivíduos, sob a forma moderada em 10% e ausente nos restantes 85%. Um exame clínico dá resultado positivo (i.e., diz que o indíviduo tem a doença) em 90% dos casos graves, em 70% dos casos moderados e em 10% dos casos saudáveis. Um indíviduo é escolhido ao acaso na população e é submetido a este exame.
   (a) Qual a probabilidade de o seu exame dar positivo?
   (b) Se o resultado do exame for positivo, qual a probabilidade de ele ter a doença?
   (c) Se o resultado do exame for negativo, qual a probabilidade de ele ter a doença?
7. Uma determinada caixa automática da UM está 10% das vezes fora de serviço. Mesmo quando está em serviço, nem todas as opções estão disponíveis. Em particular sabe-se que, quando a caixa está em serviço, em 20% das vezes não é possível consultar o saldo. Suponha que um aluno da UM, escolhido ao acaso, vai utilizar esta caixa automática.
   (a) Determine a probabilidade de ele conseguir consultar o saldo.
   (b) Sabendo que ele não conseguiu consultar o saldo, qual a probabilidade de a caixa estar fora de serviço?
   (c) Os acontecimentos "aluno não conseguiu consultar o saldo" e "o aluno encontrou a máquina fora de serviço" são independentes?
8. Retiro uma carta de um baralho com 52 cartas. Os acontecimentos "a carta é um 7" e "a carta é uma espada" são independentes? Os acontecimentos "a carta é de copas" e "a carta é um ás" são independentes? E se o baralho não contém o 7 de copas (e portanto tem apenas 51 cartas)?

9. Considere a experiência que consiste em lançar um dado equilibrado duas vezes consecutivas.

   (a) Diga se os seguintes 3 acontecimentos, A, B e C, são independentes:

   A: "saiu face par no primeiro lançamento",
   B: "saiu face ímpar no segundo lançamento",
   C: "a soma das faces obtidas é um número par",

   (b) Seja $n \geq 3$. Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "Se n acontecimentos são independentes 2 a 2 então os n acontecimentos são independentes."

10. No tratamento de uma doença, um médico receita aos doentes pelo menos um de dois medicamentos A e B. Em 70% dos casos o médico receita o medicamento A e receita o medicamento B em 40% dos casos. É introduzido no mercado um novo medicamento, C, para complementar o efeito dos medicamentos já existentes mas que só pode ser usado com um e um só dos outros dois medicamentos, i.e., não é compatível com a utilização em simultâneo de A e B. O médico receita C a 30% dos doentes que só tomam A e a 60% dos que só tomam B.

    (a) Determine a percentagem de doentes que:

       i. toma ambos os medicamentos A e B;
       ii. toma A mas não toma B;
       iii. toma B mas não toma A;
       iv. toma o medicamento C;
       v. só toma o medicamento A;

    (b) Sabendo que o médico não receitou o medicamento C a um certo doente, qual a probabilidade de este utilizar o medicamento A?