Universidade do Minho **LEI | MIEI**
Departamento de Matemática **2023/2024**

Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Elementos de Probabilidades - Exercícios Suplementares à Folha 1

---

1. Escolheu-se, ao acaso, um aluno numa escola que tem 630 alunos. Sobre os alunos desta escola, é sabido que 350 estudam Italiano, 210 estudam Espanhol e 90 estudam as duas línguas (Italiano e Espanhol). Qual a probabilidade de o aluno escolhido:
   (a) estudar apenas Italiano? (i.e., estudar Italiano mas não estudar Espanhol)
   (b) estudar apenas Espanhol? (i.e., estudar Espanhol mas não estudar Italiano)
   (c) estudar Italiano ou Espanhol?
   (d) não estudar nenhuma destas línguas?
   (e) estudar uma e uma só destas línguas?

2. Sejam A e B dois quaisquer acontecimentos e considere o acontecimento
$$A \Delta B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$
Identifique, em palavras, o acontecimento $A\Delta B$ e exprima a sua probabilidade em função de $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$. Interprete o resultado obtido.

3. Suponha que são conhecidas as seguintes percentagens relativas à utilização (ou não) de três *softwares* de tratamento estatístico (SPlus, SPSS e R) num certo grupo de estudantes:

SPlus: 10%	SPSS: 23%	R: 12%
SPlus e SPSS: 5%	SPlus e R: 4%	SPSS e R: 6%
SPlus, SPSS e R: 2%		

   Qual a probabilidade de um estudante escolhido ao acaso neste grupo:
   (a) usar pelo menos um dos *software* de tratamento estatístico?
   (b) não usar qualquer *software* de tratamento estatístico?
   (c) usar o SPlus e o SPSS, mas não o R?
   (d) usar o SPlus, mas não o SPSS nem o R?

4. Efetuaram-se dois lançamentos consecutivos de um dado equilibrado.
   (a) Determine a probabilidade de saírem faces distintas.
   (b) Sabendo que saíram faces distintas, qual a probabilidade de terem saído duas par?
   (c) Sabendo que saíram faces distintas, qual a probabilidade de pelo menos uma ser ímpar?
   (d) Sabendo que saíram faces iguais, qual a probabilidade de terem saído duas par?
   (e) Os acontecimentos "saíram faces distintas" e "saíram duas faces par" são independentes? Justifique a resposta usando a definição ou recorrendo ao resultado de (a).

5. Consideremos que um homem tem na sua mão 5 cartas vermelhas que foram escolhidas, ao acaso, num baralho de 52 cartas. Qual a probabilidade de as cartas serem todas do mesmo naipe, isto é, todas copas ou todas ouros?

6. Os clientes de uma óptica, divididos conforme o sexo e o uso ou não de lentes de contacto, existem nas seguintes proporções: Escolheu-se, ao acaso, um cliente desta óptica.

	homens	mulheres
usam lentes	17%	38%
não usam lentes	30%	15%

   (a) Determine a probabilidade de ser:

      i) um homem;
      ii) uma pessoa que usa lentes;
      iii) um homem ou uma pessoa que usa lentes;
      iv) uma mulher ou uma pessoa que não usa lentes.

   (b) Sabendo que o cliente escolhido usa lentes, qual a probabilidade de ser uma mulher?

   (c) Sabendo que o cliente escolhido usa lentes, qual a probabilidade de ser um homem?

   (d) Sabendo que o cliente escolhido não usa lentes, qual a probabilidade de ser uma mulher?

   (e) Sabendo que o cliente escolhido é uma mulher, qual a probabilidade de usar lentes?

7. Considere a experiência aleatória ξ: "lançamento de uma moeda equilibrada $n-1$ vezes consecutivas", com $n \geq 3$.

   (a) Identifique o espaço amostral associado a esta experiência aleatória.

   (b) Considere os seguintes n acontecimentos

$$E_j = \begin{cases} \text{“ocorre cara no } j\text{-ésimo lançamento”} & \text{se } j \in \{1, \ldots, n-1\} \\ \text{“ocorrem uma cara e uma coroa nos 2 primeiros lançamentos”} & \text{se } j = n \end{cases}.$$

      i. Prove que $P(E_i \cap E_j) = P(E_i)P(E_j)$, para todo o $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$.

      ii. Calcule $P\left(\bigcap_{j=1}^{n} E_j\right)$ e diga se os n acontecimentos são independentes.

8. Um míssil é lançado e acerta no alvo com probabilidade 0.5. Quantos mísseis devem ser lançados para que a probabilidade de pelo menos um deles acertar no alvo seja superior a 0.99? (Assuma que os diferentes mísseis são lançados sempre nas mesmas condições e que cada míssel acerta no alvo independentemente dos restantes)

9. Uma família tem n filhos. Cada filho tem, independentemente dos outros, igual probabilidade de ser menino ou menina. Sejam A e B os acontecimentos "a família tem no máximo uma menina" e "a família tem pelo menos uma menina e um menino", respectivamente. A e B são independentes se $n = 2$? E se $n = 3$?

10. Numa certa população, 30% dos indivíduos possuem uma certa doença e os restantes são saudáveis. Dos que têm a doença, 40% têm na forma contagiosa e os restantes são não contagiosos. Escolheu-se ao acaso um indíviduo nesta população.

   (a) Mostre que a probabilidade de o indivíduo ter a doença na forma não contagiosa é 0.18.

   (b) Um exame clínico dá resultado positivo (i.e., diz que o indivíduo tem a doença) em todos os casos contagiosos e em apenas 70% dos casos de doentes não contagiosos. O exame clínico dá negativo em 95% dos casos em que o indivíduo é saudável. Escolheu-se, ao acaso, um indivíduo desta população que foi submetido a este exame.

      i. Calcule a probabilidade de o exame dar negativo.

      ii. Se o resultado do exame der negativo, qual a probabilidade de o indivíduo ser saudável?

      iii. Se o resultado do exame der positivo, qual a probabilidade de o indivíduo ser doente?