Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Elementos de Probabilidades - Folha 2

1. Considere a experiência que consiste em lançar um dado equilibrado duas vezes consecutivas.
   (a) Determine a função massa de probabilidade e a função de distribuição da variável aleatória (v.a.) que representa:
      i. o número de faces ímpar obtidas;
      ii. o número de faces par obtidas;
      iii. o máximo das faces obtidas;
      iv. o mínimo das faces obtidas;
      v. o módulo da diferença das faces obtidas;
      vi. a soma das faces obtidas;
      vii. o número de ases obtidos.
   (b) Fazendo uso das funcões obtidas na alínea anterior, calcule a probabilidade de:
      i. sair pelo menos uma face ímpar;
      ii. não sair qualquer face par;
      iii. todas as faces obtidas serem inferiores ou iguais a 3;
      iv. todas as faces obtidas serem superiores os iguais a 4;
      v. saírem faces iguais;
      vi. saírem faces diferentes;
      vii. a soma das faces obtidas ser inferior ou igual 4;
      viii. a soma das faces obtidas ser igual a 3, sabendo que saíram faces distintas.
   (c) Sabendo que não saiu qualquer face superior a 3, qual a probabilidade de terem saído duas faces ímpar?

2. Considere a experiência que consiste em lançar um moeda equilibrada duas vezes consecutivas.
   (a) Identifique o espaço amostral desta experiência.
   (b) Considere agora as v.a.'s X e Y que representam o número de caras e o número de coroas, respectivamente, obtidas nesta experiência.
      i. Identifique (através de um diagrama ou de uma tabela) as funções X e Y.
      ii. Determine a função massa de probabilidade e a função de distribuição de cada uma das v.a.'s. Comente e compare ainda estas funções com as obtidas para as v.a.'s dos exercícios 1.(a)i. e 1.(a)ii..

3. Seja X uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{4} & \text{se} \quad 4 < x \leq 6 \\ 0 & se \quad \text{c.c.} \end{cases}$$

   onde a é uma constante real.
   (a) Mostre que $a = \frac{1}{8}$.
   (b) Determine a função de distribuição de X e esboce o respetivo gráfico.

(c) Calcule:

i. $P\left(X \leq \frac{3}{2}\right)$;

ii. $P\left(X > \frac{3}{2}\right)$;

iii. $P\left(X \geq \frac{3}{2}\right)$;

iv. $P(3 < X \leq 5)$; $P(3 \leq X \leq 5)$; $P(3 < X < 5)$; $P(3 \leq X < 5)$.

(d) Supondo que X representa o tempo de espera, em minutos, de atendimento telefónico aos clientes de uma certa empresa, determine:

i. a probabilidade de um cliente esperar mais de 1.5 minutos?

ii. a probabilidade de, dado que um cliente já esperou 1.5 minutos, ainda ter que esperar pelo menos mais 1 minuto para ser atendido?

4. Seja T uma v.a. contínua que tem distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$, i.e., a função densidade de probabilidade de T é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & se \quad x \geq 0 \end{cases} .$$

Obs.: Abrevia-se por $T \sim Exp(\lambda)$.

(a) Determine a função de distribuição de T e mostre que

$$P(T > t + x | T > t) = P(T > x),$$

para quaisquer $t > 0, x > 0$ [esta propriedade é conhecida por *falta de memória*].

(b) Determine $P(T > 1/\lambda)$.

(c) Uma colónia contém bactérias de dois tipos, A e B, aparentemente iguais, na proporção de 1 para 3. O tempo de vida (em horas) de uma bactéria do tipo A é uma v.a. com distribuição exponencial, de parâmetro 0.1, enquanto que o de uma bactéria do tipo B é exponencial, de parâmetro 0.2. Escolheu-se uma bactéria ao acaso nesta colónia.

i. Qual a probabilidade de a bactéria escolhida viver pelo menos 20h?

ii. Sabendo que a bactéria escolhida vive mais de 20h, qual a probabilidade de ser do tipo B?