Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Elementos de Probabilidades - Exercícios Suplementares à Folha 3

1. Determine o valor médio, a variância, o desvio-padrão, os quartis e o nono decil:
   (a) da v.a. discreta do exercício 1 da lista de Exercícios Suplementares à Folha 2;
   (b) das v.a.'s contínuas dos exercícios 2 e 3 da lista de Exercícios Suplementares à Folha 2.

2. A proporção de álcool num certo composto é uma v.a. contínua, X, com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & se \quad 0 < x < 1 \\ 0 & se \quad \text{c.c.} \end{cases}.$$

   (a) Determine a função de distribuição de X e calcule $E[X]$ e $Var[X]$.
   (b) O preço de venda, em euros, deste composto depende da proporção de álcool do seguinte modo: se a proporção de álcool é inferior a 1/3, o preço é de 10€ por litro, se for superior ou igual a 1/3 e inferior a 2/3, o preço é de 15€ por litro e, se for superior ou igual a 2/3, o preço é de 20€ por litro. O custo de produção é de 2€ por litro.
      i. Determine a f.m.p da v.a. que representa o lucro obtido na venda de 1L de composto.
      ii. Determine o lucro médio por litro.
   (c) Considere agora uma amostra aleatória de 5 unidades deste composto e seja Y a v.a. que representa o número de unidades da amostra cuja proporção de álcool é inferior a 1/3. A distribuição de Y é conhecida. Identifique-a e calcule a respetiva função massa de probabilidade.

3. Suponha que faz duas extracções, sem reposição, de uma urna contendo três bolas numeradas de 1 a 3. Seja X a v.a. que representa o número da primeira bola extraída e Y a v.a. que representa o máximo dos números extraídos.
   (a) Determine as f.m.p. de X e de Y e calcule os respetivos valores médio e variâncias.
   (b) Calcule $P(X = 1|Y = 3)$ e $P(Y = 1|X = 3)$ e diga se X e Y são independentes.
   (c) Considere agora as seguintes v.a.'s: $S = X + Y$ e $T = |X - Y|$.
      i. Determine as f.m.p de S e T.
      ii. Calcule $E[S]$, $E[T]$, $Var[S]$ e $Var[T]$.

4. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s independentes e identicamente distribuídas, todas com função de distribuição F.
   (a) Mostre que as v.a.'s $M = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e $N = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ têm função de distribuição dada por, respectivamente,

$$F_M(c) = [F(c)]^n \quad \text{e} \quad F_N(c) = 1 - [1 - F(c)]^n.$$

   Sugestão: Use os seguintes resultados:
      i) $(\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq c) \Leftrightarrow ((X_1 \leq c) \cap (X_2 \leq c) \cap \ldots \cap (X_n \leq c))$;
      ii) $(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) > c) \Leftrightarrow ((X_1 > c) \cap (X_2 > c) \cap \ldots \cap (X_n > c))$.
   (b) Assuma agora que F é a função de distribuição da $Exp(\lambda)$, i.e., que

$$F(c) = \begin{cases} 0 & se \quad c < 0 \\ 1 - e^{-\lambda c} & se \quad c \geq 0 \end{cases}.$$

   Identifique, justificando, a distribuição da v.a. N.