Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Elementos de Probabilidades - Folha 4

1. Suponha que o número de partículas emitidas por uma fonte radioativa, numa unidade de tempo, é uma v.a. discreta que segue uma distribuição de Poisson. É sabido que a probabilidade de não ser emitida qualquer partícula numa unidade de tempo é igual a e^{-1}.

   (a) Determine o número médio de partículas emitidas por unidade de tempo.

   (b) Calcule a probabilidade de, numa unidade de tempo,

      i. serem emitidas exatamente 2 partículas;
      ii. serem emitidas, no máximo, 2 partículas;
      iii. serem emitidas mais de 2 partículas;
      iv. serem emitidas pelo menos 2 partículas;
      v. serem emitidas, no máximo, 3 partículas, sabendo que houve emissão de partículas.

   (c) Suponha agora que se registou o número de partículas emitidas em 10 unidades de tempo distintas. Qual a probabilidade de não haver emissão de partículas em exatamente duas dessas unidades? (assuma que o número de partículas emitidas em cada uma das unidades de tempo é independente das restantes).

2. Seja X uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < a \vee x > b \\ \frac{1}{10} & se \quad a \leq x \leq b \end{cases},$$

   com a e b constantes reais, e tal que $P(X > 8) = 0.4$.

   (a) Mostre que $a = 2$ e $b = 12$.

   (b) A distribuição de X é conhecida. Identifique-a.

   (c) Suponha que X representa o consumo diário de água, em metros cúbicos (m^3), de uma certa empresa.

      i. Determine a probabilidade de, num dia, o consumo de água ser inferior a $8\mathrm{m}^3$.
      ii. Determine a probabilidade de, num dia, o consumo de água ser superior a $6\mathrm{m}^3$.
      iii. Determine a probabilidade de, em 5 dias distintos escolhidos ao acaso, haver pelo menos três dias em que o consumo de água é superior a $8\mathrm{m}^3$ (assuma que os consumos de água em dias distintos são quantidades independentes).

   (d) Determine os quartis de X e indique a expressão geral para χ_p, com $p \in]0, 1[$.

3. O tempo, em minutos (min), decorrido entre chegadas consecutivas de dois clientes a uma repartição pública é uma v.a. com distribuição exponencial e valor médio igual a 10min.

   (a) Determine o parâmetro da distribuição exponencial referida.

   (b) Qual a probabilidade de o tempo entre chegadas de dois clientes ser inferior a 8min? E qual a probabilidade de ser inferior a 10min?

   (c) Sabendo que o último cliente chegou há pelo menos 8min, qual a probabilidade de o cliente seguinte chegar durante os próximos 10min? (Sug.: Use a conhecida *falta de memória* da distribuição exponencial - ver Ex. 4, Folha 2).

4. Sejam a um qualquer número real estritamente positivo e $X \sim N(0,1)$. Diga quais das seguintes afirmações são verdadeiras:
   (a) $P(X \leq a) + P(X \geq -a) = 0$; (b) $P(X \leq a) + P(X \geq -a) = 1$;
   (c) $P(X \leq a) = P(X > a)$; (d) $P(X \leq a) = P(X \geq -a)$;
   (e) $P(X = a) = P(X = -a)$.

5. Seja $Z \sim N(0,1)$. Para cada uma das alíneas seguintes, determine $c \in \mathbb{R}$ tal que:
   (a) $P(Z \leq c) = 0.975$
   (b) $P(Z \leq c) = 0.025$
   (c) $P(Z > c) = 0.05$
   (d) $P(|Z| \leq c) = 0.99$
   (e) $P(|Z| \geq c) = 0.1$

6. Certo produto tem peso médio de 10g e desvio-padrão de 0.5g. Este produto é embalado em caixas de 12 unidades que, quando estão vazias, têm peso médio de 150g e desvio-padrão de 8g. Supondo que todos os pesos considerados são v.a.'s independentes com distribuição normal,
   (a) identifique a distribuição da v.a. que representa o peso de uma caixa cheia deste produto.
   (b) determine a probabilidade de uma caixa cheia deste produto pesar pelo menos 285g.

7. O comprimento das pétalas das flores de certa espécie tem distribuição normal, com valor médio 3.2cm e desvio-padrão 1.8cm. Considere uma amostra aleatória de 10 destas pétalas.
   (a) Identifique a distribuição da v.a. que representa a média dos comprimentos das pétalas desta amostra.
   (b) Determine a probabilidade de a média dos comprimentos das 10 pétalas ser superior ou igual a 3.5cm?

8. Admita que o tempo obtido (em minutos) por um atleta numa certa prova desportiva é uma v.a. que segue a distribuição normal com valor médio 12 e variância 14. Recolheu-se uma amostra aleatória de 10 atletas que vão disputar esta prova.
   (a) Determine a probabilidade de pelo menos dois dos 10 atletas terem um resultado superior ao valor médio da prova (12 minutos).
   (b) Determine a probabilidade de a média dos resultados da amostra se afastar do valor médio da prova em mais do que 1.5 minutos.

9. Seja m o verdadeiro valor de uma certa quantidade física e sejam $X_i = m + \psi_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, n medições independentes sujeitas a erros, ψ_i, em que as v.a.'s ψ_i são i.i.d.'s e seguem a distribuição $N(0, \frac{1}{3})$
   (a) Determine $E[\psi_i]$ e $Var[\psi_i]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.
   (b) Quantas medições devem ser feitas de modo a garantir que seja inferior a 0.05 a probabilidade de a média das medições se afastar do verdadeiro valor (m), em mais do que $\frac{1}{5}$?

10. Um investigador pretende recolher uma amostra aleatória que lhe permita estimar a média de uma população (entenda-se, a média de uma v.a.). Para o efeito ele precisa que a dimensão da amostra seja sufciente para garantir que seja de pelo menos 0.95 a probabilidade de a média da amostra não se afastar da média da população (μ) em mais de 25% do desvio-padrão da população (σ). Supondo que a v.a. em causa tem distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, qual deve ser a dimensão da amostra aleatória a recolher?