→ EP - folha 1

1-

a)

• Espaço amostral: - representamos Ca "saída de cara"

- representamos Co "saída de coroa"

$\Omega = \{(Ca, Ca), (Co, Co), (Ca, Co), (Co, Ca)\} = \{(x,y) \mid x, y \in \{Ca, Co\}\}$

$= \{Ca, Co\} \times \{Co, Ca\}$

• Exemplo de acontecimento elementar: $A = \{(Ca, Ca)\}$

A - corresponde à saída da face em ambos os lançamentos.

$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{1}{4}$

↳ probabilidade de Laplace

→ 12º + Prob total +

+ algumas propriedades

• Exemplo de acontecimento composto: B

$P(B) = \frac{\# B}{\# \Omega} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

• Acontecimento elementar: um conjunto singular, o nº de casos favoráveis é 1/1

• Acontecimento composto: um conjunto com mais do que um elemento, o nº de casos favoráveis é > 1

• Acontecimentos disjuntos: dois acontecimentos que não têm casos em comum

b)

• representamos por $\begin{cases} Co - coroa \\ Ca - Cara \end{cases}$

- i: saída da face do dado com o nº $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$

$\Omega = \{(Ca, i), (Co, i)\} = \{(x, y) \mid x \in \{Ca, Co\}, y \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$

• Exemplo de acontecimento elementar

A - saída da face cara da moeda e da face 3 do dado

$A = \{(Ca, 3)\}$ $\quad P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{1}{12}$

• Exemplo de acontecimento composto

B: saída da face com o nº 1 $\quad B = \{(Ca, 1), (Co, 1)\}$ $\quad P(B) = \frac{\# B}{\# \Omega} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

• Exemplo de acontecimento disjunto: $A = \{(a,1), (a,2)\}$

$B = \{(b,1), (a,2)\}$

2-

a) • Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$ → a probabilidade de sair face i é o dobro da probabilidade de sair face i-1

• Para todo $i \in \{2, ..., 6\}$, $P\{i\} = 2P(\{i-1\})$

• Temos $P(\Omega) = 1 = (P\{1\} \cup \{2\} \cup ... \{6\})$

$= P\{1\} + P\{2\} + ... + P\{6\}$

Logo $P(\{1\}) + 2P(\{1\}) + 2^2 P(\{1\}) + ... + 2^5 P(\{1\}) = 1$

donde se conclui que $P\{1\} = \frac{1}{63}$ → $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$

• Assim para cada $i \in \{1, ..., 6\} = \frac{2^{i-1}}{63}$

b) Não é possível aplicar a probabilidade de Laplace, pois os acontecimentos elementares não são equiprováveis

• P de Laplace apenas é usada para acontecimentos equiprováveis!!!

c) A, B, C representam os seguintes acontecimentos

• A - "saiu uma face par" $\{2, 4, 6\}$

• B - "saiu uma face com um número múltiplo de 3"

• C - "saiu uma face ímpar" $\{1, 3, 5\}$

• $P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{2}{63} + \frac{2^3}{63} + \frac{2^5}{63} = \frac{42}{63}$

• A probabilidade de sair uma face par é a soma das probabilidades de cada face par

• $P(B) = \frac{36}{63}$, $P(C) = \frac{31}{63}$

$A \cap B = \{6\}$ $P(A \cap B) = \frac{32}{63}$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$, $P(A \cup B) = \frac{46}{63}$

$A \setminus B = \boxed{A \cap \bar{B} = \{2, 4\}}$ $P(A \setminus B) = \frac{10}{63}$ → $P(A \setminus B) = P(A \cap \bar{B})$

"excepto"

↳ P(ser par e não ser múltiplo de 3)

$A \cup B \cup C = 1 = \Omega$

- retiram 3 bolas • 2 bolas brancas • 3 bolas vermelhas

a)

i) acontecimento impossível - ϕ

ii) acontecimento impossível - ϕ

iii) acontecimento certo - Ω

iv) acontecimento certo - Ω

b)

i) D "as duas primeiras bolas são brancas" $D: A \cap B$

ii) E "as duas últimas " " " " $E: B \cap C$

iii) F "saiu pelo menos uma bola branca" $F: A \cup B \cup C$

iv) G "não saiu qualquer bola branca" $G: \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C}$

v) H "saiu uma e uma só bola branca" $H: (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$

4-

- 20% contraiu a doença na 1º
- 20% contraiu a doença na 2º
- 8% contraiu a doença nos 2 surtos

- $C_1 \rightarrow$ primeiro surto
- $C_2 \rightarrow$ segundo surto

$P(C_1) = 0,2$

$P(C_2) = 0,2$

$P(C_1 \cap C_2) = 0,08$

a) pelo menos um dos surtos

$$P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2) = 0,32$$

b) nunca ter contraído a doença

$$P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) = P(\overline{C_1 \cup C_2}) = 1 - P(C_1 \cup C_2) = 0,68$$

c) apenas 2º surto

$$P(C_2 \cap \overline{C_1}) = P(C_2) - P(C_1 \cap C_2) = 0,2 - 0,08 = 0,12$$

d) "apenas um dos surtos"

$$P((C_1 \cap \overline{C_2}) \cup (\overline{C_1} \cap C_2)) = 0,12 + 0,12 = 0,24$$

↳ acontecimentos disjuntos

5 - $P(A) = 0,1$ $P(B) = 0,4$ $P(C) = 0,2$

$P(A \cap B) = 0,05$ $P(A \cap C) = 0,04$ $P(B \cap C) = 0,15$

$P(A \cap B \cap C) = 0,025$ P(

a) "pelo menos um dos medicamentos"

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= 0,1 + 0,4 + 0,2 - 0,05 - 0,04 - 0,15 + 0,025$$

$$= 0,7 - 0,24 + 0,025 = 0,485$$

70 − 24 / 46 / 0,46

b) "não tomar nenhum medicamento"

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0,485 = 0,515$$

d) "tomar apenas o medicamento A"

$$P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(A \cap \overline{B \cup C})$$

$$= P(A) - P(A \cap B \cup C)$$

$$= P(A) - P((A \cap B) \cup (A \cap C))$$

$$= P(A) - P(A \cap B \cup A \cap C)$$

$$= P(A) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)]$$

$$= 0,1 - [0,05 + 0,04 - 0,025] = 0,035$$

c) "tomar A e B e ñ tomar C"

$$P(A \cap B \cap \overline{C}) = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) = 0,05 - 0,025 = 0,025$$

e) "tomar só uma dos 3 medicamentos"

disjuntos

$$P((A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)) =$$

$$= P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$$

$$= 0,035 + 0,225 + 0,035 = 0,295$$

• Presença de doença numa certa população:

- doença forma grave: 5%
- doença forma moderada: 10%
- doença ausente: 85%

• Um exame clínico dá resultado positivo

- em 90% dos casos graves
- em 70% dos casos moderados
- em 10% dos casos saudáveis

a) Considerando os acontecimentos

- G "indivíduo c/ doença grave"
- M " " " moderada"
- S " " " sem doença"
- P "o resultado do exame é positivo"

$P(G) = 0{,}05 \quad P(M) = 0{,}1 \quad P(S) = 0{,}85$

$P(P|G) = 0{,}9 \quad P(P|M) = 0{,}7 \quad P(P|S) = 0{,}1$

• Os acontecimentos G, M e S formam uma partição do espaço amostral logo, pelo T. probabilidade Total

$$P(P) = P(P|G) \times P(G) + P(P|M) \times P(M) + P(P|S) \times P(S)$$
$$= 0{,}9 \times 0{,}05 + 0{,}7 \times 0{,}1 + 0{,}1 \times 0{,}85 = 0{,}2$$

b) Sabendo que o resultado é positivo qual a prob de ter a doença

$$P(\overline{S}|P) = \frac{P(\overline{S} \cap P)}{P(P)} = 1 - \frac{P(S \cap P)}{P(P)} = 1 - \frac{P(P|S) \times P(S)}{P(P)}$$

$$= 1 - \frac{0{,}1 \times 0{,}85}{0{,}2} = 0{,}575$$

c) Sabendo que o resultado é negativo qual a prob de ter a doença

$$P(\overline{S}|\overline{P}) = 1 - P(S|\overline{P})$$

8-

$P(\text{carta ser 7}) = \frac{4}{52}$, $P(\text{carta ser espadas}) = \frac{13}{52}$ $\times = \frac{1}{52}$

$P(\text{ser 7} \cap \text{ser espadas}) = \frac{1}{52}$

$P(\text{ser copas}) = \frac{13}{52}$, $P(\text{ser ás}) = \frac{4}{52}$ $\times = \frac{1}{52}$

$P(\text{ser copas} \cap \text{ser ás}) = \frac{1}{52}$

sem 7 de copas

$P(\text{ser 7}) = \frac{3}{51}$, $P(\text{ser espadas}) = \frac{13}{51}$ $\times = \frac{13}{867}$ $\neq$

$P(\text{ser 7} \cap \text{ser espadas}) = \frac{1}{51}$

$P(\text{ser copas}) = \frac{12}{51}$, $P(\text{ser ás}) = \frac{3}{51}$ $\neq$ $P(\text{ser ás} \cap \text{copas}) = \frac{1}{51}$

7 Ω 12 6

$P(\bar{S}|\bar{P}) = 1 - P(S|\bar{P})$

$$= 1 - \frac{P(\bar{P}|S)\times P(S)}{P(\bar{P}|S)\times P(S) + P(\bar{P}|M)\times P(M) + P(\bar{P}|G)\times P(G)}$$

$$= 1 - \frac{0,9\times 0,85}{0,9\times 0,85 + 0,3\times 0,1 + 0,1\times 0,05} = 0,04375$$

7 -

- Funcionamento da CA:
  - 10% das vezes dá fora de serviço
  - estando em serviço, ñ é possível consultar o saldo 20% das vezes

- Representamos por:

S - "caixa em serviço

C - é possível consultar o saldo"

$P(S) = 0,9$ $\qquad$ $P(C|S) = 0,8$

$P(\bar{S}) = 0,1$

- Acontecimentos independentes: dois acontecimentos são independentes se $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$

a) "prob de conseguir consultar o saldo"

- os acontecimentos S e $\bar{S}$ formam uma partição do espaço amostral

logo, pelo T. prob total temos

$$P(C) = P(C|S)\times P(S) + P(C|\bar{S})\times P(\bar{S})$$
$$= 0,8\times 0,9 + 0\times 0,1 = 0,72$$

b) "

$$P(\bar{S}|\bar{C}) = \frac{P(\bar{S}\cap\bar{C})}{P(\bar{C})} = 1 - P(S|\bar{C}) = 1 - \frac{P(\bar{C}|S)\times P(S)}{P(\bar{C}|S)\times P(S) + P(\bar{C}|\bar{S})\times P(\bar{S})} =$$

$$= 1 - \frac{0,18}{0,28} = \frac{0,1}{0,28}$$

c) Os acontecimentos $\bar{C}$ e $\bar{S}$ são independentes se $P(\bar{C}\cap S) = P(\bar{C})\times P(S)$

- Sabe-se que os acontecimentos $\bar{C}$ e $\bar{S}$ são independentes e $P(\bar{S})\times P(\bar{C}) > 0$ então
- $P(\bar{S}|\bar{C}) = P(\bar{S})$. Uma vez que $P(\bar{S})\times P(\bar{C}) > 0$ e $P(\bar{S}|\bar{C}) = \frac{0,1}{0,28} \neq 0,1 = P(\bar{S})$ concluímos que $\bar{S}$ e $\bar{C}$ ñ são independentes