→ EP - folha 2

→ função massa de prob
→ função distribuição
→ função densidade de prob
→ propriedades
→ distribuição exponencial

1-

a) lançamento de um dado 2 vezes

i)

Espaço amostral: $\Omega = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, \dots, 6\}\}$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

$X(i, j) =$ nº de faces ímpares obtidas $\begin{cases} 0 & \text{se i e j são pares} \\ 1 & \text{se i é par e j ímpar ou vice-versa} \\ 2 & \text{se ambos são ímpares} \end{cases}$

• fmp de X

$X : \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ 9/36 & 18/36 & 9/36 \end{cases}$

$9/36 \to \frac{3}{6} \times \frac{3}{6}$

• função distribuição de X

$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$

$F_X(c) = P(X \leq c) = \begin{cases} 0 & \text{se } c < 0 \\ 9/36 & \text{se } 0 \leq c < 1 \\ 27/36 & \text{se } 1 \leq c < 2 \\ 1 & \text{se } 2 \leq c \end{cases}$

ii) igual à anterior

iii) o máximo das faces obtido

$Z : \Omega \to \mathbb{R}$

$Z(i, j) = \max\{i, j\}$ $\qquad Z\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

$Z : \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/36 & 3/36 & 5/36 & 7/36 & 9/36 & 11/36 \end{cases}$

só há um caso em que 1 é o máximo

1º caso (o caso c/ ele mesmo) + 2 como nº anterior

• função distribuição de Z

$F(Z): \mathbb{R} \to [0,1]$

$$F_Z(c) = P(Z \leq c) = \begin{cases} 0 & \text{se } c < 1 \\ 1/36 & \text{se } 1 \leq c < 2 \\ 4/36 & \text{se } 2 \leq c < 3 \\ 9/36 & \text{se } 3 \leq c < 4 \\ 16/36 & \text{se } 4 \leq c < 5 \\ 25/36 & \text{se } 5 \leq c < 6 \\ 1 & \text{se } 6 \leq c \end{cases}$$

b)

i) "saiu pelo menos uma face ímpar"

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36}$$

ii) "não saiu uma face par"

↳ o contrário de não saiu nenhuma face par é saiu pelo menos uma face ímpar

$$P(Y = 0) = \frac{9}{36} \quad [1 - P(X \geq 1)]$$

iii) "todas as faces obtidas serem ≤ 3"

$$P(Z \leq 3) = \frac{9}{36}$$

iv) "todas as faces obtidas serem superiores a 4"

$$P(Z \geq 4) = 1 - P(Z \leq 4) = 1 - \frac{16}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

3-

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 1/4 & \text{se } 4 < x \leq 6 \\ 0 & \text{se } c.c. \end{cases}$$

• Por definição de função densidade de probabilidade temos $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{4} a\,dx + \int_{4}^{6} \frac{1}{4}dx + \int_{6}^{+\infty} 0dx$$

$$= ax\Big|_{0}^{4} + \frac{1}{4}x\Big|_{4}^{6} = 4a + \frac{2}{4}$$ Logo, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ sse $a = \frac{1}{8}$

b) $F_X(e): \mathbb{R} \to [0,1]$ $\qquad P(X \leq e) = F_X(e) = \int_{-\infty}^{e} f(x)dx$

$$F_x(e) = \begin{cases} 0 & \text{se } e \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{e} \frac{1}{8}dx & \text{se } 0 \leq e \leq 4 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{4} 1/8\,dx + \int_{4}^{e} 1/4\,dx & \text{se } 4 < e \leq 6 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{4} 1/8\,dx + \int_{4}^{6} 1/4\,dx + \int_{6}^{e} 0dx & \text{se } 6 \leq e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } e \leq 0 \\ 1/8\,e & \text{se } 0 \leq e \leq 4 \\ 1/2 + 1/4(e-4) & \text{se } 4 < e < 6 \\ 1 & \text{se } 6 \leq e \end{cases}$$

c)
i) $P(X \leq 3/2) = F_X(3/2) = \frac{1}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{16}$

ii) $P(X > 3/2) = 1 - P(X \leq 3/2) = 1 - F_X(3/2) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$

iii) $P(X \geq 3/2) = P(X > 3/2) = \frac{13}{16}$

iv) $P(3 < X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 3)$

$= F_X(5) - F_X(3) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(5-4)\right) - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$

Δ porque a variável é contínua

• $P(3 \leq X \leq 5) = P(3 < X < 5) = P(3 \leq X < 5) = P(3 < X \leq 5) = \frac{3}{8}$

d)

i) $P(X \geq \frac{3}{2}) = \frac{13}{16}$

ii) $P(X \geq 2{,}5 \mid X \geq 1{,}5) = \frac{P(X \geq 2{,}5 \cap X \geq 1{,}5)}{P(X \geq 1{,}5)} =$

$= \frac{P(X \geq 2{,}5)}{P(X \geq 1{,}5)} = \frac{1 - P(X \leq 2{,}5)}{13/16} = \frac{1 - \frac{3}{16}}{13/16} = \frac{11}{13}$

4-

• distribuição exponencial

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) $F_T : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$F_T(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} 0\,dx & \text{se } t \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{t} \lambda e^{-\lambda x} & \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

$\quad\; \| $

$P(T \leq t)$

• $P(T > t + x \mid T > t) = \frac{P(T > t + x \cap T > t)}{P(T > t)}$

$= \frac{P(T > t + x)}{P(T > t)} = \frac{1 - P(T \leq t + x)}{1 - P(T \leq t)} =$

$= \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(t+x)})}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} = e^{-\lambda x} = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = 1 - F_T(x) = 1 - P(T \leq x)$

$= P(T > x)$

b) $P(T > \frac{1}{\lambda})$, $\lambda > 0$

• Temos $\frac{1}{\lambda} > 0$, logo $P(T > \frac{1}{\lambda}) = 1 - P(T \leq \frac{1}{T}) = 1 - F_T(1/\lambda) =$

$= 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}}) = e^{-1}$

c) • Colonia c/ 2 tipos de bacterias A e B na proporção de 1 para 3

Representamos por:

A: bacteria A

B: bacteria B

• De acordo c/ o enunciado $P(A) = 1/4$ e $P(B) = 3/4$

• T_A representa o tempo de uma bacteria do tipo A

$T_A \sim Exp(0,1)$ Função distribuição de T_A: $F_{T_A}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-0{,}1 \times x} & x \geq 0 \end{cases}$

• T_B representa o tempo de vida de uma bacteria do tipo B

$T_B \sim Exp(0,2)$ Função distribuição de T_B: $F_{T_B}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-0{,}2 \times x} & x \geq 0 \end{cases}$

i) "bacteria viver pelo menos 20 horas"

$\hookrightarrow V$

$P(V) = ?$

teorema da prob. total

$P(V) = P(V|A) \times P(A) + P(V|B) \times P(B)$

$= P(T_A \geq 20) \times P(A) + P(T_B \geq 20) \times P(B)$

$= (1 - P(T_A \leq 20)) \times P(A) + (1 - P(T_B \leq 20)) \times P(B)$

$= (1 - F_{T_A}(20)) \times \frac{1}{4} + (1 - F_{T_B}(20)) \times \frac{3}{4}$

$= 1 - (1 - e^{-0{,}1 \times 20}) \times \frac{1}{4} + 1 - (1 - e^{-0{,}2 \times 20}) \times \frac{3}{4}$

$= 1 - 1 + e^{-2} \times \frac{1}{4} + 1 - 1 + e^{-4} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} e^{-2} + \frac{3}{4} e^{-4}$

ii) $P(B|V) = \dfrac{P(T_B \geq 20) \times P(B)}{\underbrace{P(V)}_{P(T_B \geq 20) \times P(B) \,+\, P(T_A \geq 20) \times P(A)}} = \dfrac{3e^{-21}}{e^{-2} + 3e^{-21}}$ → formule de Bayes