→ E P - Folha 3

1-

Valor médio de X

- caso discreto: $E[X] = \sum_{x_i \in C_X} x_i P(X = x_i)$

(onde C_X é o contradomínio de X)

- caso contínuo: $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

→ Valor médio, variância e desvio padrão (propriedades)
→ quantis, decis etc
→ binomial
→ propriedades

Variância de X

- caso discreto: $Var[X] = \sum_{x_i \in C_X} (x_i - E[X])^2 P(X = x_i)$

- caso contínuo: $Var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x)\,dx$

→ se $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx < +\infty$, $Var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - (E[X])^2$

Desvio padrão

$\sigma_X = \sqrt{Var[X]}$

Ver melhor:
quantis/quartis.
2

a)
- folha 2 - 1 a) iii)

- Z = v.a. que representa o máximo ...

- f.m.p. de Z

Z:	1	2	3	4	5	6
	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

- Valor médio

$E[Z] = \sum z \times P(Z = z) = 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + 4 \times \frac{7}{36} + 5 \times \frac{9}{36} +$

$6 \times \frac{11}{36} = \frac{161}{36}$

- Variância de Z

$Var[Z] = E[(Z - \mu_Z)]^2 = \sum_{z \in \{1, 2, \dots, 6\}} (z - 161/36)^2 \cdot P(Z = z)$

$Var[Z] = (1 - 161/36)^2 \times 1/36 + (2 - 161/36)^2 \times \frac{3}{36} + \dots + (6 \dots$

$= \frac{2555}{1296}$

- desvio padrão $\delta_Z = \sqrt{\frac{2555}{1296}}$

quartis

$z_{0,25} = \inf\{e \in \mathbb{R} \mid F_Z(e) \geq 0,25\} = 3$

$z_{0,5} = \inf\{e \in \mathbb{R} \mid F_Z(e) \geq 0,5\} = 5$ (mediana)

$z_{0,75} = \inf\{e \in \mathbb{R} \mid F_Z(e) \geq 0,7\} = 6$

decil

$z_{0,1} = \inf\{e \in \mathbb{R} \mid F_Z(e) \geq 0,1\} = 2$

b) X v.a contínua

- função densidade probabilidade de X

$$f(x) = \begin{cases} 1/8 & x \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 1/4 & x \quad 4 < x \leq 6 \\ 0 & x \quad e.c. \end{cases}$$

- função distribuição de X

$$F_X(e) = \begin{cases} 0 & x \quad e \leq 0 \\ 1/8\, e & x \quad 0 \leq e \leq 4 \\ 1/4\, e - 1/2 & x \quad 4 < e \leq 6 \\ 1 & x \quad 6 < e \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_0^4 1/8\, x\, dx + \int_4^6 \frac{1}{4} x\, dx + \int_6^{+\infty} 0\, x\, dx$$

$$= \frac{1}{16} x^2 \Big|_0^4 + \frac{1}{8} x^2 \Big|_4^6 = \left(\frac{16}{16} - \frac{0}{16}\right) + \left(\frac{36}{8} - \frac{16}{8}\right) = \frac{7}{2}$$

b) Cont

• Variância de X

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (x - 7/2)^2 \times 0\, dx + \int_0^4 (x - 1/2)^2 \times 1/8\, dx + \int_4^6 (x - 7/2) \frac{1}{4} dx$$

$$+ \int_0^{+\infty} (x - 7/2)^2 \times 0\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + \frac{49x}{4} \right)\Big|_0^4 + \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + \frac{49x}{4} \right)\Big|_4^6 = \frac{37}{12}$$

• Desvio padrão de X: $D(x) = \sqrt{\frac{37}{12}}$

• Quartis e primeiro decil

$x_{0,25} = \inf \{ e \in \mathbb{R} \mid F_x(e) \geq 0,2 \} = \inf \{ e \in \mathbb{R} \mid e \geq 2 \} = 2$

$F_x(e) \geq 0,25 \Rightarrow (0 \geq 0,25 \wedge e < 0) \vee (1/8\, e \geq 0,25 \wedge 0 \leq e \leq 4)$
$\vee\ (1/4\, e - 1/2 \geq 0,25 \wedge 4 < e \leq 6) \vee (1 \geq 0,25 \wedge e > 6)$

$\Rightarrow e \geq 2$

$x_{0,5} = \inf \{ e \in \mathbb{R} \mid F_x(e) \geq 0,5 \} = 4$

$x_{0,75} = \inf \{ e \in \mathbb{R} \mid F_x(e) \geq 0,75 = 6$

$x_{0,1} = \inf \{ e \in \mathbb{R} \mid F_x(e) \geq 0,1 \} = 0,8$

2-

a)

- X e Y va's
- X e Y dizem-se independentes se, para quaisquer $B_1, B_2 \in \mathbb{R}$:

$P(X \in B_1 \cap Y \in B_2) = P(X \in B_1) \times P(X \in B_2)$

- Se X e Y são variaveis discretas X e Y são independentes se, para quaisquer $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$: $P(X = a_1 \cap Y = a_2) = P(X = a_1) \times P(Y = a_2)$

- X - v.a discreta

Um conjunto finito c/ n elementos

Diz-se que X segue a distribuição uniforme no conjunto e escreve-se X Uniforme ($\mathcal{U}$) se a sua f.m.p é definida por:

$$P(X = x) = f(x) = \begin{cases} 1/n & \text{se } x \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{se c.c} \end{cases}$$

- Uma vez que X ~ Uniforme ({-1, 1}), Y ~ Uniforme ({-1, 1}), as suas f.m.p são definidas por:

$$X : \begin{cases} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{cases} \qquad Y : \begin{cases} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{cases}$$

- Seja $Z = e^Y$. A v.a é discreta e a sua f.m.p é definida por

$$Z : \begin{cases} e^{-1} & e^{1} \\ 1/2 & 1/2 \end{cases}$$

- As variaveis X e Z são independentes. De facto, para quaisquer $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$P(X = a_1 \cap Z = a_2) = P(X = a_1) \times P(Z = a_2)$

- Se $a_1 \notin \{-1, 1\}$ ou $a_2 \notin \{e^{-1}, e^{1}\}$

$P(X = a_1 \cap Z = a_2) = 0 = P(X = a_1) \times P(Z = a_2)$

- Se $a_1 \in \{-1, 1\}$ e $a_2 = e^{\delta}$, para algum $\delta \in \{-1, 1\}$

*cont

a) cont.

- Se $a_1 \in \{-1,1\}$ e $a_2 = e^{\delta}$, para algum $\delta \in \{-1,1\}$

$P(X=a_1 \cap Z=a_2) = P(X=a_1 \cap e^Y = e^{\delta})$

$= P(X=a_1 \cap Y=\delta)$, $\delta \in \{-1,1\}$

$= P(X=a_1) \times P(Y=\delta)$ (X, Y são independentes)

$= 1/2 \times 1/2 = P(X=a_1) \times P(Z=a_2)$

b) X e XY são independentes?

- Seja $Z = XY$. A v.a Z é discreta e a sua função de massa de probabilidade é definida por:

$Z = \begin{cases} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{cases}$ $(-1,1)$ $(1,-1)$ $(1,1)$ $(-1,-1)$

- As va's X e Z são independentes se, para quaisquer $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$P(X=a_1 \cap X=a_2) = P(X=a_1) \times P(X=a_2)$

- Se $a_1 \notin \{-1,1\}$ ou $a_2 \notin \{-1,1\}$

$P(X=a_1 \cap Z=a_2) = P(X=a_1 \cap XY=a_2)$ $(a_2/a_1 \in \{-1,1\})$

$= P(X=a_1 \cap Y=a_2/a_1)$

$= P(X=a_1) \times P(Y=a_2/a_1)$

$= 1/2 \times 1/2$

$= P(X=a_1) \times P(Z=a_2)$

Assim, as variáveis X e $Z = XY$ são independentes.

3-

$E[X] = 3$ $Var[X] = 1{,}1$

$Y = 2X + 4$ Z: independente e identicamente distribuída com X

a) $E[Y] = E[2X+4] = 2E[X] + 4 = 10$

$Var[Y] = Var[2X+4] = 2^2\, Var[X] = 4{,}4$

b) Sabemos que $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

Logo, $E[X^2] = Var[X] + (E[X])^2 = 1{,}1 + 3^2 = 10{,}1$

c)

4-

• X - representa o nº de apartamentos vendidos após a publicação de um anuncio

X v.a discreta com f.m.p definida por $X: \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ 0,8 & 0,15 & 0,05 \end{cases}$

• os resultados das publicações de cada anuncio são independentes

a)

X_i - v.a que representa o nº de apartamentos vendidos na sequência do anuncio ($i \in \{1, 2, \dots, 100\}$)

Seja $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$ $\qquad X_i \sim X$

- Valor médio de Z

$E[Z] = \mu_Z = E[X_1 + X_2 + \dots + X_{100}]$

$= E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_{100}] = 100 \times E[X]$

$E[X] = \sum_{x \in \{0,1,2\}} x P(X = x) = 0 \times 0,8 + 1 \times 0,15 + 2 \times 0,05 = 0,25$

Logo $E[Z] = 100 \times \boxed{0,25} = 25$

• Variância de Z

$Var[Z] = Var[X_1 + X_2 + \dots + X_{100}] = Var[X_1] + Var[X_2] + \dots + Var[X_{100}] = 100 \times Var[X]$

$Var[X] = \sum (x - 0,25)^2 \times P(X = x) = (0 - 0,25)^2 \times 0,8 + (1 - 0,25)^2 \times 0,15 + (2 - 0,25)^2 \times 0,05$

$= 0,2875$ $\qquad$ Logo, $Var[Z] = 100 \times 0,2875 = 28,75$

b) $P(Z_N = N) < 0,1$

- Queremos determinar N tal que: $P(X_1=0 \cap X_2=0 \cap \dots \cap X_N=0) < 0,1$

- Como as v.a. $X_1, \dots, X_N$ são independentes temos:

$P(X_1=0 \cap X_2=0 \cap \dots \cap X_N=0) = P(X_1=0) \times P(X_2=0) \times \dots P(X_N=0)$

$= 0,8^N$

- O menor N tal que $0,8^N < 0,1$ é 11

5-

a)

- 60% dos indivíduos de uma determinada população são pobres

X - representa o número de indivíduos pobres de uma amostra da população c/ 10 indivíduos.

$X \sim Bin(\underbrace{10}_{\text{total da amostra}}, \underbrace{0,6}_{\text{probabilidade de ser}})$

$P(X=9) = \binom{10}{9} \times 0,6^9 \times 0,4^1$

$= \frac{10!}{9!(10-9)!} \times 0,6^9 \times 0,4^1$

$= 10 \times 0,6^9 \times 0,4^1 = 4 \times 0,6^9$

$P(X \geq 9) = P(X=9) + P(X=10)$

$= 4 \times 0,6^9 + \binom{10}{10} \times 0,6^{10} \times 0,4^0$

$= 4 \times 0,6^9 + 0,6^{10}$

E - experiência aleatória

g - ocorre c/ probabilidade

$p \in]0,1[$

X representa o nº de vezes que ocorre g em n repetições da experiência $X \sim Bin(n,p)$

$K \in \mathbb{N}_0$

$P(X=K) = \binom{n}{K} \times p^K \times (1-p)^{n-K}$

c) $X \sim Bin(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in]0,1[$

$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \times (1-p)^{n-k}$

- Probabilidade de sair par quando se lança um determinado dado equilibrado $= \frac{3}{6} = 0{,}5$

X - v.a que representa o nº de vezes que ocorre face par em 10 lançamentos
nº de ensaios

$X \sim Bin(10, 0{,}5)$ → probabilidade em 1 vez

$P(X=2) = \binom{10}{2} \times (0{,}5)^2 \times (1-0{,}5)^8$

$= \frac{10!}{2!\,8!} \times (0{,}5)^{10} = 45 \times 0{,}5^{10}$

$P(X \leq 8) = 1 - P(X \geq 8) = 1 - (P(X=9) + P(X=10)) =$

→ probabilidade de ocorrer pelo menos dois jogos ímpares, isto é, a probabilidade de ocorrer pelo pelo menos 8 pares

$= 1 - \left(\binom{10}{9} \times 0{,}5^9 \times 0{,}5 + \binom{10}{10} \times 0{,}5^{10} \times 0{,}5^0 \right)$

$= 1 - (10 \times 0{,}5^{10} + 1 \times 0{,}5^{10}) = 1 - (11 \times 0{,}5^{10})$

d)

- X - nº de bolas brancos extraídos ~~numa~~ extração de bolas com reposição

- Probabilidade de extrair uma bola branca (numa extração) $= \frac{3}{5}$

$X \sim (4, \frac{3}{5})$

P(todas as bolas extraídas serem brancas) $= P(X=4) = \binom{4}{4} \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(1-\frac{3}{5}\right)^0 = \left(\frac{3}{5}\right)^4$

P(todas as bolas extraídas serem vermelhas) $= P(X=0) = \binom{4}{0} \times \left(\frac{3}{5}\right)^0 \times \left(1-\frac{3}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^4$

→ Extração sem reposição:

- P(todas as bolas extraídas serem brancas) = 0

P(todas as bolas extraídas serem red) = 0