→ EP - Folha 4

1-

a) $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$

$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$

Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ então $E[X] = \lambda$

$P(X=0) = e^{-1} \Leftrightarrow \frac{\lambda^0}{0!} e^{-k} = e^{-1}$

$\Leftrightarrow e^{-\lambda} = e^{-1}$

$\Leftrightarrow \lambda = 1$ logo $X \sim \text{Poisson}(1)$. Assim, $E[X]=1$

b)

i) "exatamente 2 partículas"

$P(X=2) = \frac{1^2}{2!} \times e^{-1} = \frac{1}{2} e^{-1}$

ii) "no máximo 2 partículas"

$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$= \frac{1^0}{0!} e^{-1} + \frac{1^1}{1!} \times e^{-1} + \frac{1^2}{2!} \times e^{-1}$

$= e^{-1} + e^{-1} + \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{5}{2} e^{-1}$

iii) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \frac{5}{2} e^{-1}$

iv) $P(X \geq 2) = P(X > 2) + P(X=2)$

$= \left(1 - \frac{5}{2} e^{-1}\right) + \frac{1}{2} e^{-1} = 1 - 2e^{-1}$

v) $P(X \leq 3 \mid X \geq 1) = \frac{P(X \leq 3 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)}{1 - P(X=0)}$

$= \frac{e^{-1} + \frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{6} e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{5}{3} \times \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}}$

→ Poisson (quantos etc)

→ propriedades

→ Normal + tabela, $\bar{X}_n$

→ Exponencial

c)

- Y é v.a.r que representa o nº de unidades de tempo em que é/são emitidas (...) num total de 10 unidades de tempo
- A probabilidade de não ser emitida nenhuma partícula numa unidade de tempo é e^{-1}

$Y \sim (10, e^{-1})$

$P(Y=2) = \binom{10}{2} \times (e^{-1})^2 \times (1-e^{-1})^8 = 45 \times e^{-2} \times (1-e^{-1})^8$

2 -

a) X v.a contínua

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \text{ ou } (x > b) \\ 1/10 & \text{se } a \leq x \leq b \end{cases} \quad ; \quad P(X > 8) = 0,4$$

- Uma vez que f é uma função densidade probabilidade temos:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ logo $\int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{b} \frac{1}{10}\,dx + \int_{b}^{+\infty} 0\,dx = 1$

Portanto $\left.\frac{x}{10}\right|_a^b = 1$ Assim, $\frac{b-a}{10} = 1$

- $P(X > 8) = 0,4 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq 8) = 0,4 \Leftrightarrow P(X \leq 8) = 0,6$

$P(X \leq 8) = \int_{-\infty}^{8} f(x)\,dx$

- Se $8 < a$

$\int_{-\infty}^{8} f(x)\,dx = 0,6 \Rightarrow \int_{-\infty}^{8} 0\,dx = 0,6$ (impossível)

- Se $a \leq 8 \leq b$

$\int_{-\infty}^{8} f(x)\,dx = 0,6 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{8} \frac{1}{10}\,dx = 0,6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{8-a}{10} = 0,6 \Leftrightarrow a = 2$

* cont.

2-

a) Cont.

- Se $b < 8$

$$\int_{-\infty}^{8} f(x)\,dx = 0{,}6 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{b} \frac{1}{10}\,dx + \int_{b}^{8} 0\,dx = 0{,}6$$

$$\Leftrightarrow \frac{b-a}{10} = 0{,}6 \quad \left(\text{impossível, pois } \frac{b-a}{10} = 1\right)$$

Logo $a = 2$ donde $b = 12$ $\left(\text{pois } \frac{b-a}{10} = 1\right)$

b)

- Uma vez que $(12-2) = 10$ e a função densidade de probabilidade de X é definida por:

$$f(x) \begin{cases} 0 & \text{se } x < 2 \text{ ou } x > 12 \\ 1/10 & \text{se } 2 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

Concluimos que $X \sim U([2,12])$

c)

$F_x(c) : \mathbb{R} \to [0,1]$ $\qquad P(X \leq c) = F_X(c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$

$$F_x(c) = \begin{cases} 0 & \text{se } c < 2 \\ \int_{-\infty}^{2} 0\,dx + \int_{2}^{c} \frac{1}{10} & \text{se } 2 \leq c \leq 12 \\ \int_{-\infty}^{2} 0\,dx + \int_{2}^{12} \frac{1}{10}\,dx & \text{se } c > 12 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } c < 2 \\ 0 + \frac{c-2}{10} & \text{se } 2 \leq c \leq 12 \\ 1 & \text{se } c > 12 \end{cases}$$

i) "Consumo inferior a 8 m^3"

$$\underbrace{P(X < 8) = P(X \leq 8)}_{\text{v.a contínua}} = F_x(8) = \frac{8-2}{10} = 0{,}6$$

ii) "consumo ser superior a 6"

$P(X>6) = 1 - P(X \leq 6)$

$= 1 - F_X(6) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = 0,6$

iii) "em 5 dias escolhidos ao acaso, haver pelo menos 3 dias em que o consumo é superior a $8 m^3$"

• Y v.a que representa o nº de dias em que o consumo de água é superior a $8m^3$ num total de 5 dias

P(consumo de água num dia ser superior a $8 m^2$) $= P(X>8) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - 0,6 = 0,4$

$Y \sim Bin(5; 0,4)$

$P(Y \leq 3) = P(Y=3) + P(Y=4) + P(Y=5)$

$= \binom{5}{3} \times (0,4)^3 \times (0,6)^2 + \binom{5}{4} \times (0,4)^4 \times (0,6)^1 + \binom{5}{5} \times (0,4)^5 \times (0,6)^0$

$= 10 \times (0,4)^3 \times 0,6^2 + 5 \times (0,4)^4 \times (0,6)^1 + (0,4)^5$

d)

?

$X_{0,25} = \inf\{c \in \mathbb{R} \mid F_X(c) \geq 0,25\}$

$= \inf\{c \in \mathbb{R} \mid (0 \geq 0,25 \wedge c < 2) \vee (c-2 \leq 0,25 \wedge 2 \leq c \leq 12) \vee$
$\vee (1 \geq 0,25 \wedge c > 12)\}$

$X_{0,5} = \inf\{c \in \mathbb{R} \mid F_X(c) \geq 0,5\}$

$= \inf\{c \in \mathbb{R} \mid (0 \geq 0,75 \wedge c < 2) \vee (c-2 \leq 0,5 \wedge 2 \leq c \leq 12) \vee (1 \geq 0,25 \wedge c > 12)\}$

$= 7$

Cont

$X_{0,75} = \inf\{c \in \mathbb{R} \mid F_X(c) \geq 0,75\} = 9,5$

2-

d) cont.

$x_p = \inf\{e \in \mathbb{R} \mid F_c(x) \geq p\}$

$= \inf\{e \in \mathbb{R} \mid \underbrace{(0 \geq p \wedge c < 2)}_{\text{Imp.}} \vee \left(\frac{e-2}{10} \geq p \wedge 2 \leq e \leq 12\right) \vee$

$\vee (1 \geq p \wedge c < 12)\}$

$= \inf\{c \in \mathbb{R} \mid e \geq 10p+2 \wedge 2 \leq e \leq 12 \vee e > 12\}$

$= \{e \in \mathbb{R} \quad e \geq 10p+2\} = 10p+2$

3-

a)

- Se $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- Como $X \sim Exp(\lambda)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}^+$ e $E[X] = 10$, então $\lambda = \frac{1}{10} = 0{,}1$

Logo, $X \sim Exp(0{,}1)$

b)

$X \sim Exp(\lambda)$

- função densidade de probabilidade de X

$$F_x(e) = \begin{cases} 0 & \text{se } e < 0 \\ 1 - e^{-\lambda e} & \text{se } e \geq 0 \end{cases}$$

Como $X \sim Exp(0{,}1)$

$$F_x(e) = \begin{cases} 0 & \text{se } e < 0 \\ 1 - e^{-0{,}1e} & \text{se } e \geq 0 \end{cases}$$

$P(X < 8) = P(X \leq 8) = 1 - e^{-0{,}1 \times 8} = 1 - e^{-0{,}8}$

X é contínua

$P(X < 10) = P(X \leq 10) = 1 - e^{-0{,}1 \times 10} = 1 - e^{-1}$

e) $X \sim Exp(\lambda)$

$P(X > a + c \mid X > a) = P(X > c)$ ← falta de memória

$P(X \leq c + 10 \mid X \geq c)$, $c \geq 8$

$P(X \leq c + 10 \mid X \geq c) = 1 - P(X \geq c + 10 \mid X \geq c)$

$= 1 - P(X > c + 10 \mid X > c)$

$= 1 - P(X > 10)$ ← falta de memória

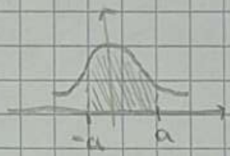
$= P(X \leq 10) = 1 - e^{-1}$

4 -

$X \sim N(0,1)$

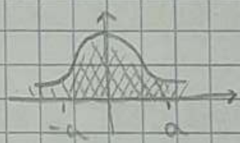
a) $P(X \leq a) + P(X \geq a) = 0$

Falso



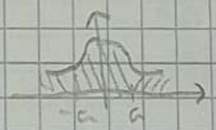
b) $P(X \leq a) + P(X \geq a) = 1$

Falso > 1



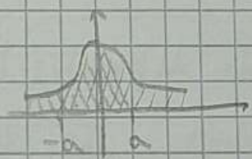
c) $P(X \leq a) = P(X > a)$

Falso



d) $P(X \leq a) = P(X \geq -a)$

Verdadeiro



e) $\underbrace{P(X = a)}_{=0} = \underbrace{P(X = -a)}_{=0}$ como X é contínua Verdadeiro

5 -

a) $P(Z \leq c) = 0{,}975 > 0$

Logo $c \in \mathbb{R}^+$

Procuramos na tabela da $N(0,1)$ o valor $0{,}975 - 0{,}5 = 0{,}475$

Tem-se que $c = 1{,}96$

Observamos que $c = x_{0{,}975}$ de $N(0,1)$

5 -

b) $P(Z \leq c) = 0,025 < 0,5$ logo c é negativo

- Observando que $c = x_{0,025}$ pela simetria que $c = -x_{0,975} = -1,96$

c) $P(Z \geq c) = 0,05 \Rightarrow P(Z \leq c) = 0,95 > 0,5$ logo $c \in \mathbb{R}^+$

Procurando na tabela da $N(0,1)$ o valor de $0,95 - 0,5 = 0,45$

tem-se que $c = \frac{1,64 + 1,65}{2} = 1,645$

d) $P(|Z| \leq c) = 0,99$

$P(|Z| \leq c) = 2P(0 \leq Z \leq c) \rightarrow P(0 < Z \leq c) = \frac{99}{2} = 0,495$

Da tabela tem-se $c = \frac{2,57 + 2,58}{2} = 2,575$

e) $P(|Z| \geq c) = 0,1 \Rightarrow P(|Z| < c) = 0,9 \Rightarrow P(0 < Z < c) = \frac{0,9}{2} = 0,45$

Procurando na tabela de $N(0,1)$ o valor $0,45$, tem-se

que $c = 1,645$

7 -

- X : va que representa o comprimento de uma pétala destas flores

$X \sim N(3,2; 1,8) = N(3,2; 3,24)$

- amostra aleatória de 10 pétalas, e temos $X_1, \dots, X_{10}$ independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com v.a X

a) $\overline{X}_{10} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i$

- Pela propriedade 8 ii) da distribuição normal, tem-se que

$\overline{X}_{10} \sim N\left(3,2; \frac{1,8^2}{10}\right) = N(3,2; 0,324)$

b) $P(\overline{X}_{10} \geq 3,5) \underset{\text{contrário}}{=} 1 - P(X < 3,5) = 1 - P\left(\frac{\overline{X}_{10} - 3,2}{\sqrt{0,324}}\right) = 1 - P\left(\frac{3,5 - 3,2}{\sqrt{0,324}}\right)$

$= 1 - F_{(0,1)}(0,53) = 1 - [0,5 + 0,2019] = 0,2981$

8-

X: v.a que representa o tempo obtido por um atleta na prova

$X \sim N(12, 14)$

a) Y: v.a que representa o nº de atletas entre os 10 da amostra aleatória que tiverem um resultado superior a 12 min

$Y \sim Bin(10, P(X > 12)) = Bin(10, \frac{1}{2})$ ← ???

• Pretende-se determinar $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2)$

$= 1 - [P(Y=0) + P(Y=1)]$

$= 1 - \left[\binom{10}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^9\right]$

$= 0{,}9893$

b)

• Pretende-se calcular $P(|\overline{X}_{10} - 12| > 1{,}5)$ em que $\overline{X}_{10} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i$

Observar que $\overline{X}_{10} \sim N(12, \frac{14}{10})$

$P(|\overline{X}_{10} - 12| > 1{,}5) = 1 - P(|\overline{X}_{10} - 12| \leq 1{,}5) = 1 - P(-1{,}5 \leq \overline{X}_{10} - 12 \leq 1{,}5) =$

$= 1 - P\left(\frac{-1{,}5}{\sqrt{1{,}4}} \leq \frac{\overline{X}_{10} - 12}{\sqrt{1{,}4}} \leq \frac{1{,}5}{\sqrt{1{,}4}}\right) = 1 - P(-1{,}27 \leq Z \leq 1{,}27)$

$= 1 - P(|Z| \leq 1{,}27)$ em que $Z \sim N(0,1)$

$= 1 - 2\,P(0 \leq Z \leq 1{,}27) = 1 - 2 \times 0{,}3980 = 0{,}2040$

9-

a) $E[\varepsilon_i] = 0$ $\qquad E[X_i] = m + 0 = m$

$Var[\varepsilon_i] = 1/3$ $\qquad Var[X_i] = Var[\varepsilon_i] = 1/3$

$X_i \sim N(m, 1/2 \mid i = 1, \ldots, m)$

9-

b)

• Pretende-se determinar n tal que $P(|\bar{X}_n - m| > \frac{1}{5}) < 0,05$ em que $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$P(|\bar{X}_n - m| > 1/5) < 0,05 \Leftrightarrow 1 - P(|\bar{X}_n - m| \leq 1/5) < 0,05$

$\Leftrightarrow P(|\bar{X}_n - m| \leq 1/5) > 0,95 \Leftrightarrow P(-1/5 \leq \bar{X}_n - m \leq 1/5) \geq 0,95$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-1/5}{\sqrt{\frac{1}{3}n}} \leq \frac{\bar{X}_n - m}{\sqrt{\frac{1}{3}n}} \leq \frac{1/5}{\sqrt{\frac{1}{3}n}}\right) \geq 0,95$$

Obtemos assim, $\bar{X}_n \sim N(m, \frac{1/3}{n}) = N(m, \frac{1/3}{n})$

? $\times \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow P\left(|Z| \leq \frac{\sqrt{3n}}{5}\right) \geq 0,95$, em que $Z \sim N(0,1)$

$\Leftrightarrow P\left(0 < Z \leq \frac{\sqrt{3}}{5}\right) \geq 0,475 \Rightarrow \frac{\sqrt{3n}}{5} \geq 1,96$

$\Rightarrow \sqrt{3n} \geq 1,96 \times 5 \Rightarrow 3n \geq (1,96 \times 5)^2 \Rightarrow n \geq \frac{(1,96 \times 5)^2}{3}$

$\Rightarrow n \geq 32,01 \Rightarrow n = 33$