Capítulo III: Parâmetros de Localização e Dispersão
e
Independência de Variáveis Aleatórias

Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Licenciatura em Engenharia Informática
e
Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Universidade do Minho
Ano Letivo 2023/2024

Conteúdo

Neste capítulo pretende-se:

- apresentar algumas medidas de localização e de dispersão de uma variável aleatória (valor médio, desvio-padrão/variância, quantis);
- estender o conceito de independência de acontecimentos a variáveis aleatórias.

III. 1. Medidas de localização e de dispersão

As variáveis aleatórias têm características, designadas de *teóricas* ou *populacionais*, correspondentes às características amostrais calculadas em estatística descritiva para uma amostra aleatória dessas mesmas variáveis (por exemplo: média, variância, desvio-padrão, mediana, quartis, percentis, etc.).

Estas características pretendem quantificar determinados aspectos distribuição da v.a., nomeadamente, a localização na reta real e a dispersão/variabilidade.

Definição [Valor Médio]

Seja X uma v.a.. O *valor médio* de X (ou valor médio populacional), usualmente denotado por μ_X ou $E[X]$, é a média pesada, de acordo com a função massa ou da função densidade de probabilidade, dos valores de X, i.e.,

$$\mu_X = \sum_{x_i \in C_X} x_i P(X = x_i) \quad , \qquad \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

(caso discreto) (caso contínuo)

<u>Obs.</u>: A notação $E[X]$ deriva de ”esperança matemática” que é uma designação alternativa para valor médio.

III. 1. Medidas de localização e de dispersão

Outra característica importante de uma v.a. X é a *variância*, usualmente denotada por σ_X^2 ou $Var[X]$.

Definição [Variância e Desvio-Padrão]

Seja X uma v.a.. A *variância* de X, usualmente denotado por σ_X^2 ou $Var[X]$, é dada por

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2].$$

Tal como acontece com o valor médio, a variância é calculada de forma diferente conforme X é discreta ou contínua. Assim, a variância de X é dada por:

$$\sigma_X^2 = \sum_{x_i \in C_X} (x_i-\mu_X)^2 P(X=x_i) \quad , \quad \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f(x)dx.$$

(caso discreto) (caso contínuo)

A $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$ chamamos *desvio-padrão* da v.a. X.

Obs.: Repare-se na semelhança destas fórmulas com as da média, variância e desvio-padrão amostrais usadas em estatística descritiva.

Notas:

1) Recordar que as somas/integrais podem não existir ou não ser finitas. Nesse caso diz-se que a v.a. não tem a característica em causa.

2) Quando $E[X^2]$ existe, i.e., quando

$$\sum_{x_i \in C_X} x_i^2 P(X = x_i) < +\infty \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx < +\infty$$

(caso discreto) (caso contínuo)

a fórmula da variância reduz-se facilmente a

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2,$$

ou seja,

$$\sigma_X^2 = \left[\sum_{x_i \in C_X} x_i^2 P(X = x_i)\right] - (E[X])^2 \quad , \quad \sigma_X^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx\right] - (E[X])^2 \quad .$$

(caso discreto) (caso contínuo)

3) Quando $E[X^k]$ existe, o seu valor é designado de *momento de ordem* k *de* X.

Finalmente, os quantis teóricos, que desempenham um papel muito importante em inferência estatística, são definidos de modo análogo aos quantis amostrais.

Recordar que, em estatística descritiva, o quantil amostral de ordem p, é, grosso modo, o valor que separa os $100 \times p\%$ valores inferiores da amostra dos $100 \times (1-p)\%$ superiores.

Definição [Quantil]

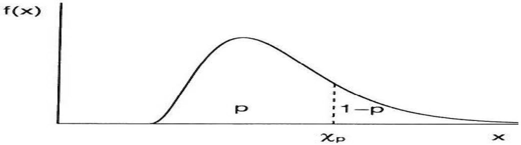
Para uma v.a. X, o *quantil de ordem* p, com $p \in]0,1[$, denota-se por χ_p, é dado por:

$$\chi_p = \inf\{c \in \mathbb{R} : F(c) \geq p\},$$

onde F é a função de distribuição de X.

III. 1. Medidas de localização e de dispersão

Para uma v.a. contínua, o quantil χ_p é um valor que, no gráfico da função densidade de probabilidade, tem à sua esquerda área igual a p e à sua direita área igual a $(1-p)$.



Assim, neste caso e se $F^{-1}(p)$ existir, tem-se que

$$\chi_p = F^{-1}(p).$$

Casos especiais de quantis:

1. Mediana: $\chi_{0.5}$
2. Quartis: $\chi_{0.25}, \chi_{0.5}, \chi_{0.75}$
3. Decis: $\chi_{0.1}, \chi_{0.2}, \chi_{0.3}, \chi_{0.4}, \chi_{0.5}, \chi_{0.6}, \chi_{0.7}, \chi_{0.8}, \chi_{0.9}$
4. Percentis: $\chi_{0.01}, \chi_{0.02}, \ldots, \chi_{0.98}, \chi_{0.99}$

III. 2. Independência de variáveis aleatórias

No Capítulo I, vimos a definição de acontecimentos independentes. Na altura ficou subjacente a ideia intuitiva de que a independência de dois acontecimentos se baseava no facto de o conhecimento da realização de um deles não alterar a probabilidade de ocorrência do outro (fica ao cuidado do aluno estender esta ideia a mais do que 2 acontecimentos).

Vejamos agora a definição de variáveis aleatórias independentes.

III. 2. Independência de variáveis aleatórias

Definição [Variáveis Aleatórias Independentes]

Dadas $n \geq 2$ variáveis aleatórias, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, estas dizem-se independentes se, para todos os $B_1, B_2, \ldots, B_n$ subconjuntos de $\mathbb{R}$,

$$P((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in (B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n)) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i) \tag{1}$$

Notas:

1) Observe que a condição (1) pode ser escrita do seguinte modo:

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1)P(X_2 \in B_2)\ldots P(X_n \in B_n).$$

2) Entre v.a.'s a "," substituí a "$\cap$", pelo que

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_n \in B_n) \equiv P((X_1 \in B_1) \cap (X_2 \in B_2) \cap \ldots \cap (X_n \in B_n))$$

III. 2. Independência de variáveis aleatórias

Exemplo: Se X e Y são v.a.'s independentes então

- $P(X=2, Y=-1) = P(\,(X,Y) \in \{2\} \times \{-1\}\,) = P(X=2)\,P(Y=-1)$
- $P(X=2, Y>0) = P(\,(X,Y) \in \{2\} \times]0,+\infty[\,) = P(X=2)\,P(Y>0)$
- $P(0<X<1, Y \leq \pi) = P(\,(X,Y) \in]0,1[\times]-\infty,\pi]\,) = P(0<X<1)\,P(Y \leq \pi)$

III. 2. Independência de variáveis aleatórias

Regra geral, é difícil provar que variáveis aleatórias são independentes. Existem resultados importantes que nos permitem averiguar, com mais facilidade, sobre a independência. Vamos enunciar aqui alguns.

Teorema

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias.

i) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independentes sse, para quaisquer números reais $c_1, c_2, \ldots, c_n$, se tem
$$P(X_1 \leq c_1, X_2 \leq c_2, \ldots, X_n \leq c_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq c_i).$$

ii) Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a.'s discretas, então $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independentes sse, para quaisquer números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se tem
$$P(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = a_i).$$

iii) Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independentes e $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ são funções reais de variável real, então $\phi_1(X_1), \phi_2(X_2), \ldots, \phi_n(X_n)$ também são independentes.

III. 2. Independência de variáveis aleatórias

Vamos terminar esta secção enunciando algumas propriedades sobre o valor médio e a variância de transformações lineares, somas e produtos de v.a.'s discretas ou contínuas). Algumas destas propriedades dizem respeito a v.a.'s independentes.

1) Para quaisquer constantes reais, a e b, e para qualquer v.a. X, tem-se

$$E[aX+b] = aE[X]+b \text{ e } Var[aX+b] = a^2 Var[X].$$

2) Para quaisquer v.a.'s $X_1, X_2, \ldots, X_n$, tem-se

$$E[X_1+X_2+\ldots+X_n] = E[X_1]+E[X_2]+\ldots+E[X_n].$$

3) Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a.'s **independentes** então

$$Var[X_1+X_2+\ldots+X_n] = Var[X_1]+Var[X_2]+\ldots+Var[X_n].$$

4) Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a.'s **independentes** então

$$E[X_1\,X_2\,\ldots\,X_n] = E[X_1]E[X_2]\ldots E[X_n].$$

Nota: Em geral, as propriedades 3) e 4) não são válidas quando as v.a.'s não são independentes.