Capítulo II: Variáveis Aleatórias

Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Licenciatura em Engenharia Informática
e
Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Universidade do Minho
Ano Letivo 2023/2024

Conteúdo

Neste capítulo pretende-se:

- apresentar o conceito de variável aleatória;
- distinguir entre variáveis aleatórias discretas e variáveis aleatórias contínuas;
- apresentar funções que “caracterizam” as variáveis aleatórias (e.g., função massa de probabilidade, função densidade de probabilidade e função de distribuição).

II. 1. Variáveis aleatórias - Introdução

Em muitas situações práticas interessa-nos (ou é conveniente) associar valores numéricos aos diferentes resultados de uma experiência aleatória, ou seja, a cada elemento ω do espaço de resultados Ω interessa associar um número real. Esta associação permitirá passar do espaço amostral Ω, por vezes complicado, para um conjunto mais simples ($\mathbb{R}$ ou um seu subconjunto).

Por exemplo, na experiência que consiste em efetuar vários lançamentos consecutivos de um dado podemos estar interessados em estudar

- o valor da soma das faces obtidas;
- o número de ases obtidos;
- o número de faces par obtidas;
- o máximo (ou o mínimo) das faces obtidas,

etc.

Nota: No lançamento de um dado, “sair ás” corresponde a “sair face 1”.

II. 1. Variáveis aleatórias - Introdução

Surge assim a definição de *variável aleatória*.

Definição [Variável aleatória]

Seja Ω o espaço amostral associado a uma experiência aleatória. Uma variável aleatória (v.a.) é uma função, cujo domínio é o conjunto Ω e cujo conjunto de chegada é $\mathbb{R}$, que a cada elemento ω de Ω faz corresponder um número real, i.e.,

$$X: \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}.$$

Notas:
1) As v.a.'s são habitualmente denotadas com letras maísculas, e.g., X, Y, Z, etc.
2) As variáveis aqui estudadas são conhecidas por v.a.'s reais (devido ao conjunto de chegada da função). Existem, no entanto, outros tipo de variáveis aleatórias como, por exemplo, v.a.'s complexas ($X : \Omega \to \mathbb{C}$).

Exemplo: Na experiência aleatória que consiste em efectuar dois lançamentos consecutivos de uma moeda, o espaço amostral é, como bem sabemos,

$$\Omega = \{(Ca, Ca), (Ca, Co), (Co, Ca), (Co, Co)\},$$

onde Ca e Co representam *cara* e *coroa*, respetivamente.

Consideremos agora as v.a.'s $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ que representam, respetivamente, o **número de coroas** e a **diferença entre o número de caras e o número de coroas**.

Estas funções, X e Y, estão descritas na seguinte tabela:

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
(Ca,Ca)	0	2
(Ca,Co)	1	0
(Co,Ca)	1	0
(Co,Co)	2	-2

Dado um subconjunto $B \subseteq \mathbb{R}$, a probabilidade de a v.a. X assumir um valor pertencente a B, i.e. $P(X \in B)$, será dada pela probabilidade do subconjunto formado pelos elementos de Ω cuja imagem, pela função X, pertence a B.

Em linguagem matemática, o subconjunto formado pelos elementos de Ω cuja imagem, pela função X, pertence a B é designado por imagem inversa de B pela função X e é denotado por $X^{-1}(B)$:

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}.$$

Assim, depois de identificado $X^{-1}(B)$, teremos simplesmente

$$P(X \in B) = P(X^{-1}(B)).$$

Voltando ao exemplo dos dois lançamentos de uma moeda:

O acontecimento “saiu pelo menos uma coroa” é agora representado por

$$(X \geq 1)$$

ou, de modo equivalente,

$$(X \in [1, +\infty[).$$

E o acontecimento “número de caras igual ao número de coroas” é representado por

$$(Y = 0)$$

ou, de modo equivalente,

$$(Y \in \{0\}).$$

Para calcular $P(X \in [1, +\infty[)$ e $P(Y \in \{0\})$ temos primeiro que identificar os seguintes subconjuntos de Ω:

$$X^{-1}([1, +\infty[) \quad \text{e} \quad Y^{-1}(\{0\}).$$

Observando a tabela atrás, vemos facilmente que

$$X^{-1}([1, +\infty[) = \{(Ca, Co), (Co, Ca), (Co, Co)\}$$

e que

$$Y^{-1}(\{0\}) = \{(Ca, Co), (Co, Ca)\}.$$

Se a moeda for equilibrada, os acontecimentos elementares são equiprováveis, i.e.,

$$P(\{(Ca, Ca)\}) = P(\{(Ca, Co)\}) = P(\{(Co, Ca)\}) = P(\{(Co, Co)\}) = \frac{1}{4}.$$

Sendo Ω finito e os acontecimentos elementares são equiprováveis, recorre-se à definição de Laplace para calcular as probabilidades dos diferentes acontecimentos decorrentes desta experiência. Assim,

$$P(X \geq 1) = P\left(X^{-1}([1, +\infty[\,)\right) = P(\,\{(Ca, Co), (Co, Ca), (Co, Co)\}\,) = \frac{3}{4}$$

e

$$P(Y = 0) = P\left(Y^{-1}(\{0\})\right) = P(\,\{(Ca, Co), (Co, Ca)\}\,) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Entre as v.a.'s distinguem-se v.a.'s discretas e v.a.'s contínuas.

Uma v.a. X diz-se *discreta* se o seu contradomínio (i.e., o conjunto de valores que a função X assume) é um conjunto finito (tem cardinal finito) ou infinito numerável (e.g., $\mathbb{N},\ \mathbb{N}_0,\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Z}^+,\ \mathbb{Z}^-$).

Note que, se o espaço amostral Ω for finito ou infinito numerável, então qualquer v.a. sobre ele definido será discreta (pela definição de função, o número de elementos do contradomínio nunca poderá ser superior ao número de elementos do domínio Ω).

Mas, se Ω for infinito não numerável (e.g., $\mathbb{R},\ \mathbb{R}^-$, qualquer intervalo real de amplitude não nula), podemos definir v.a.'s discretas mas também não discretas.

II. 2. Variáveis aleatórias discretas

Uma v.a. discreta, X, é caracterizada pelo seu contradomínio, denotado por C_X, que é o conjunto de valores que a v.a. assume com probabilidade estritamente positiva, e ainda por uma função, designada de *função massa de probabilidade* (f.m.p.), que a cada elemento $a \in C_X$ faz corresponder o valor $P(X = a)$.

Sendo X uma v.a. discreta com contradomínio $C_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, a sua f.m.p. é usualmente representada do seguinte modo:

$$X : \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ P(X = x_1) & P(X = x_2) & P(X = x_3) & \ldots \end{array} \right. .$$

No exemplo dos dois lançamentos da moeda equibrada, as f.m.p.'s de X e Y são, respetivamente:

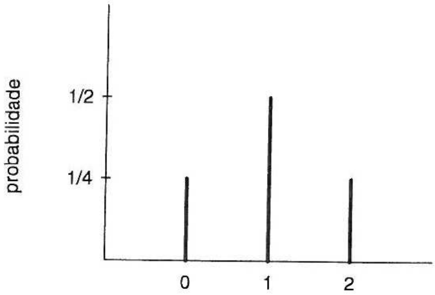
$$X : \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right. \quad \text{e} \quad Y : \left\{ \begin{array}{ccc} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right. .$$

Graficamente, a f.m.p. representa-se através de um *diagrama de linhas* (ver exemplo na página seguinte).

O diagrama de linhas é semelhante ao diagrama de barras, utilizado para representar as frequências relativas simples de uma amostra proveniente de uma variável quantitativa discreta.

De facto, a f.m.p. é a versão teórica (ou populacional) que tem a correspondente versão amostral nos diagramas de barras utilizados em estatística descritiva para a representação de dados discretos.

Exemplo: f.m.p. da variável X - diagrama de linhas



Usando a definição axiomática de probabilidade e a definição de v.a., deduz-se o seguinte: se X é uma v.a. discreta, com contradomínio C_X, então

$$\sum_{x_i \in C_X} P(X = x_i) = 1.$$

Deduz-se também a seguinte fórmula para o cálculo de probabilidades envolvendo uma v.a. X discreta: para qualquer $B \subseteq \mathbb{R}$, tem-se

$$P(X \in B) = \sum_{x_i \in C_X \,:\, x_i \in B} P(X = x_i).$$

No exemplo dos dois lançamentos da moeda equilibrada tem-se, para a v.a. X,

$$P(0 \leq X \leq 1.5) = \sum_{x_i \in C_X \,:\, x_i \in [0,\, 1.5]} P(X = x_i) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

e, para a v.a. Y,

$$P(Y > 0) = \sum_{y_i \in C_Y \,:\, y_i \in]0,\, +\infty[} P(Y = y_i) = P(Y = 2) = \frac{1}{4}.$$

Entre as v.a's que têm contradomínio infinito não numerável (e.g., $\mathbb{R}$,$\mathbb{R}^-$, $[0,+\infty[$, um qualquer intervalo real de amplitudo não nula), vamos estudar as chamadas v.a.'s *absolutamente contínuas*, que são caracterizadas à custa de uma função designada de *função densidade de probabilidade*.

Definição [Função densidade de probabilidade]

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se uma função densidade de probabilidade se satisfaz as seguintes condições:

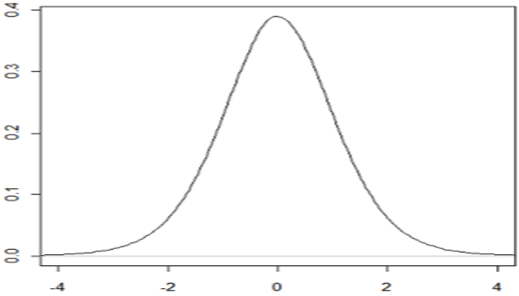
i) para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$,

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

<u>Nota</u>: Nesta disciplina, as v.a.'s *absolutamente contínuas* serão simplesmente chamadas de *contínuas*.

II. 3. Variáveis aleatórias contínuas

De seguida apresenta-se, a título de exemplo, o gráfico de uma função densidade de probabilidade: uma função não negativa e tal que a área da região compreendida entre o eixo dos $xx's$ e o gráfico da função é igual a 1.



Note-se que a função densidade de probabilidade é a versão teórica (ou populacional) do histograma das frequências relativas simples, usado em estatística descritiva para representar dados contínuos (recordar que a área total de tal histograma é igual a 1).

II. 3. Variáveis aleatórias contínuas

Para uma v.a. contínua, X, com função densidade de probabilidade f, tem-se que: para qualquer $B \subseteq \mathbb{R}$,

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx.$$

Note que, se B é um conjunto singular, i.e. $B = \{b\}$, com b um número real, tem-se

$$P(X \in B) = P(X = b) = 0.$$

Quando B é um intervalo real da forma $[a, c]$, $[a, c[$, $]a, c]$ ou $]a, c[$, com $a < c$, tem-se

$$P(X \in B) = \int_a^c f(x)dx.$$

II. 4. Função de distribuição de uma variável aleatória

Já vimos que as v.a.'s discretas são caracterizadas à custa da função massa de probabilidade e que as v.a.'s contínuas são caracterizadas à custa da função densidade de probabilidade. No entanto, **qualquer** v.a. é também caracterizada pela chamada *função de distribuição*.

Definição [Função de distribuição]

Chamamos função de distribuição da v.a. X à função

$$\begin{array}{cccc} F: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ & c & \mapsto & F(c) = P(X \leq c) \end{array} .$$

De entre as propriedades de uma função de distribuição, destacam-se:

i) F é uma função não decrescente,

ii) F é contínua à direita,

iii)
$$\lim_{c \to -\infty} F(c) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{c \to +\infty} F(c) = 1.$$

II. 4. Função de distribuição de uma variável aleatória

$\rightsquigarrow$ Função de distribuição - caso discreto:

Se X é v.a. discreta, a sua função de distribuição obtém-se do seguinte modo

$$F(c) = P(X \leq c) = \sum_{x_i \in C_X \,:\, x_i \leq c} P(X = x_i).$$

Exemplo: Para a v.a. X que representa o número de coroas obtidas em dois lançamentos consecutivos de uma moeda equilibrada, a respetiva função de distribuição é dada por:

$$F(c) = \begin{cases} 0 & se \quad c < 0 \\ P(X=0) & se \quad 0 \leq c < 1 \\ P(X=0) + P(X=1) & se \quad 1 \leq c < 2 \\ P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) & se \quad c \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & se \quad c < 0 \\ \frac{1}{4} & se \quad 0 \leq c < 1 \\ \frac{3}{4} & se \quad 1 \leq c < 2 \\ 1 & se \quad c \geq 2 \end{cases}$$

Nota: Esboce o gráfico desta função e constate que esta verifica as propriedades `i)` a `iii)` referidas no slide anterior.

II. 4. Função de distribuição de uma variável aleatória

$\rightsquigarrow$ Função de distribuição - caso contínuo:

Se X é v.a. contínua, com função densidade de probabilidade f, a sua função de distribuição obtém-se do seguinte modo

$$c \in \mathbb{R},\ F(c) = P(X \leq c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx.$$

Exemplo: Seja X a v.a. contínua X com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 10 & se \quad -0.1 \leq x \leq 0 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}.$$

A função de distribuição é dada por:

$$F(c) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{c} 0\,dx & se \quad c < -0.1 \\ \int_{-\infty}^{-0.1} 0\,dx + \int_{-0.1}^{c} 10\,dx & se \quad -0.1 \leq c < 0 \\ \int_{-\infty}^{-0.1} 0\,dx + \int_{-0.1}^{0} 10\,dx + \int_{0}^{c} 0\,dx & se \quad c \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & se \quad c < -0.1 \\ 10(c+0.1) & se \quad -0.1 \leq c < 0 \\ 1 & se \quad c \geq 0 \end{cases}$$

II. 4. Função de distribuição de uma variável aleatória

Observações:

1) A função de distribuição é muito útil para calcular probabilidades do tipo

$$P(a < X \leq b)$$

com $a < b$ constantes reais. De facto,

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P(\,(X \leq b) \cap (X > a)\,) \\ &= P(\,(X \leq b) \cap (\overline{X \leq a})\,) \\ &= P(X \leq b) - P(X \leq a) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned} \quad .$$

2) Se X é uma v.a. contínua então a respetiva função de distribuição é uma função contínua.

3) A funcão de distribuição é a versão teórica (ou populacional) do gráfico das frequências relativas acumuladas usado em estatística descritiva.