Universidade do Minho | LEI | MIEI
Departamento de Matemática | 21 de maio de 2022

UC - Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Teste - Elementos de Probabilidades

versão A — duração: 2 horas

Nome:	Número:

Grupo I - 6 valores

Considere X uma variável aleatória contínua com função de distribuição dada por

$$F_X(c) = \begin{cases} 0 & se \quad c < 1 \\ \frac{c^2-1}{6} & se \quad 1 \leq c < 2 \\ \frac{1}{4}c & se \quad 2 \leq c < 4 \\ 1 & se \quad c \geq 4 \end{cases}.$$

Para cada uma das questões seguintes, assinale a resposta correta marcando x no quadrado correspondente.

1. O valor de $P(X > 3)$ é:
   - ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{7}{8}$ ☐ 0 ☐ $\frac{3}{4}$
2. O valor de $P(X \neq 3)$ é:
   - ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{3}{4}$ ☐ 0 ☐ 1
3. O valor de $P(2 \leq X \leq 3)$ é:
   - ☐ $\frac{5}{8}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 0
4. O primeiro quartil de X é:
   - ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ 3 ☐ 2 ☐ $\frac{\sqrt{10}}{2}$
5. A distribuição de X é:
   - ☐ $Exp(1)$ ☐ $N(1,4)$
   - ☐ $Exp(2)$ ☐ Nenhuma das anteriores
6. Seja Y uma v.a. independente e identicamente distribuída com X. O valor de $P((X \leq 2) \cup (Y > 2))$ é:
   - ☐ $\frac{3}{4}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ 1 ☐ 0
7. Assuma que X representa o tempo de espera, em horas, que um cliente aguarda para ser atendido numa repartição pública.
   (a) Sabendo que um cliente já esperou pelo menos 2 horas, a probabilidade de ser atendido durante os 30 minutos seguintes é:
   - ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ 0 ☐ Nenhuma das anteriores

   (b) A v.a. que representa o número de clientes que, numa amostra aleatória de 5 clientes escolhidos ao acaso nesta repartição, espera mais de 2 horas para ser atendido tem distribuição:
   - ☐ $Bin\left(5, \frac{1}{2}\right)$ ☐ $Poisson\left(\frac{5}{2}\right)$ ☐ $Exp\left(\frac{2}{5}\right)$ ☐ Nenhuma das anteriores

Grupo II - 3 valores

Considere duas variáveis aleatórias independentes, X e Y, e tais que $X \sim N(-1,1)$ e $Y \sim U([-1,1])$.
Para cada uma das questões seguintes, assinale a resposta correta marcando x no quadrado correspondente.

1. O valor de $P(X < 0)$ é:

   ☐ 0.8413 ☐ 0.5 ☐ 0.3413 ☐ Nenhuma das anteriores

2. O valor de $P(Y < 0)$ é:

   ☐ 0.25 ☐ 0.75 ☐ 0.5 ☐ Nenhuma das anteriores

3. O valor médio de $\frac{X}{2} - Y$ é:

   ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ Nenhuma das anteriores

4. A variância de $\frac{X}{2} - Y$ é:

   ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{7}{12}$ ☐ $\frac{1}{6}$ ☐ Nenhuma das anteriores

Grupo III - 3 valores

Uma empresa tem 3 equipas, E_1, E_2 e E_3, a que recorre para entregar os seus artigos ao domicílio. A equipa E_1 entrega 30% dos artigos, a equipa E_2 entrega 50% dos artigos e a equipa E_3 entrega os restantes. Sabe-se que 20% dos artigos entregues pela equipa E_1 chegam atrasados, 10% dos artigos entregues pela equipa E_2 chegam atrasados e que 5% dos artigos entregues por E_3 chegam atrasados. Escolheu-se, ao acaso, um artigo que foi entregue ao domicílio.
Para cada uma das questões seguintes, assinale a resposta correta marcando x no quadrado correspondente.

1. Os acontecimentos "Artigo entregue pela equipa E_1", "Artigo entregue pela equipa E_2" e "Artigo entregue com atraso" formam uma partição do espaço amostral?

   ☐ Sim ☐ Não

2. A probabilidade de o artigo não chegar atrasado e ser entregue pela equipa E_2 é de:

   ☐ $\frac{0.5}{0.9}$ ☐ 0.9×0.5 ☐ 0.9 ☐ Nenhuma das anteriores

3. A probabilidade de o artigo chegar atrasado é de:

   ☐ $0.2 + 0.1 + 0.05$ ☐ $0.8 \times 0.3 + 0.9 \times 0.5 + 0.95 \times 0.2$

   ☐ $0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.5 + 0.05 \times 0.2$ ☐ Nenhuma das anteriores

4. Sabendo que o artigo não chegou atrasado, qual a probabilidade de ter sido entregue pela equipa E_3?

   ☐ $\frac{0.2}{1-(0.2+0.1+0.05)}$ ☐ $\frac{0.2}{1-(0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.5 + 0.05 \times 0.2)}$

   ☐ $\frac{0.95 \times 0.2}{1-(0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.5 + 0.05 \times 0.2)}$ ☐ Nenhuma das anteriores

Grupo IV - 8 valores

Responda à questão 1.(a) no espaço disponibilizado para o efeito. Utilize esta página e a seguinte para responder às restantes questões deste grupo. Pode trocar a ordem, mas identifique sempre a questão a que está a responder. Se necessário, peça uma folha de teste para continuação.

No que se segue considere um dado e uma moeda, ambos equilibrados.

1. Considere a experiência aleatória que consiste em efetuar dois lançamentos consecutivos da moeda e, de seguida, lançar uma vez o dado.

   (a) Identifique o espaço amostral da experiência aleatória recorrendo ao produto cartesiano de conjuntos.

   R: ____

   (b) Identifique o subconjunto do espaço amostral que corresponde ao acontecimento I: "saiu face 1 no lançamento do dado" e diga, justificando, se I é um acontecimento elementar.

   (c) Diga, usando a definição, se os 3 acontecimentos seguintes, A, B e C, são independentes:

   A: "saiu cara no primeiro lançamento da moeda",
   B: "saiu uma cara e uma coroa nos dois lançamentos da moeda",
   C: "saiu a face 1 no lançamento do dado".

   (d) Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "Se A, B e C são 3 acontecimentos independentes então os acontecimentos A e $B \cup C$ também são acontecimentos independentes". Justifique usando a definição de acontecimentos independentes.

2. Considere agora a experiência que consiste em efetuar três lançamentos do dado e seja Z a variável aleatória que representa o número de vezes que saiu uma face inferior ou igual 2.

   a) Z tem uma distribuição conhecida. Identifique-a e determine a respetiva função de distribuição.

   b) Determine os quartis de Z.

   c) Determine $P(Z > Var[Z])$.