UC - Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Teste - Elementos de Probabilidades

versão A — duração: 2 horas

Nome:	**Número:**

Grupo I - 6 valores

Considere X uma variável aleatória contínua com função de distribuição dada por

$$F_X(c) = \begin{cases} 0 & se \quad c < 1 \\ \frac{c^2-1}{6} & se \quad 1 \le c < 2 \\ \frac{1}{4}c & se \quad 2 \le c < 4 \\ 1 & se \quad c \ge 4 \end{cases}.$$

Para cada uma das questões seguintes, assinale a resposta correta marcando x no quadrado correspondente.

1. O valor de $P(X > 3)$ é: $P(X>3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - F_X(3) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

   ☒ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{7}{8}$ ☐ 0 ☐ $\frac{3}{4}$

2. O valor de $P(X \neq 3)$ é: $P(X \neq 3) = 1 - P(X=3) = 1 - 0 = 1$

   ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{3}{4}$ ☐ 0 ☒ 1

3. O valor de $P(2 \le X \le 3)$ é: $P(X=2) + P(2 < X \le 3) = 0 + F_X(3) - F_X(2) = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$

   ☐ $\frac{5}{8}$ ☒ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 0

4. O primeiro quartil de X é: $\chi_{0.25} = \inf\{c \in \mathbb{R} : F_X(c) \ge 0.25\}$ $\quad \frac{c^2-1}{6} \ge 0.25 \Leftrightarrow \frac{c^2-1}{6} \ge \frac{1}{4} \Leftrightarrow c^2 \ge \frac{5}{2} \Leftrightarrow c \ge \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ $\quad 1 \le c < 2$

   ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ 3 ☐ 2 ☒ $\frac{\sqrt{10}}{2}$

5. A distribuição de X é:

   ☐ $Exp(1)$ — função distrib. do tipo $F(c) = \begin{cases} 0 & se \ c < 0 \\ 1 - e^{-\lambda c} & se \ c \ge 0 \end{cases}$
   ☐ $Exp(2)$
   ☐ $N(1,4)$
   ☒ Nenhuma das anteriores

   A função de distribuição de uma $N(\mu, \sigma^2)$ é, naturalmente, dada por
   $c \in \mathbb{R}, \ F(c) = \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dx.$
   (slides)

6. Seja Y uma v.a. independente e identicamente distribuída com X. O valor de $P((X \le 2) \cup (Y > 2))$ é:

   ☒ $\frac{3}{4}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ 1 ☐ 0

   $P((X \le 2) \cup (Y > 2)) =$
   $= 1 - P(X > 2 \cap Y \le 2) =$
   $= 1 - P(X > 2) \times P(Y \le 2)$ independente
   $= 1 - (1 - P(X \le 2)) \times P(Y \le 2)$
   $= 1 - (1 - F(2)) \times F(2)$
   $= 1 - (1 - \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2}$
   $= 3/4$

7. Assuma que X representa o tempo de espera, em horas, que um cliente aguarda para ser atendido numa repartição pública.

   (a) Sabendo que um cliente já esperou pelo menos 2 horas, a probabilidade de ser atendido durante os 30 minutos seguintes é:

   ☐ $\frac{1}{2}$ ☒ $\frac{1}{4}$ ☐ 0 ☐ Nenhuma das anteriores

   $P(X \le 2.5 \mid X \ge 2)$
   $= \frac{P(X \le 2.5, X \ge 2)}{P(X \ge 2)}$
   $= \frac{P(2 \le X \le 2.5)}{1 - P(X < 2)}$
   $= \frac{P(2 < X \le 2.5)}{1 - P(X \le 2)}$ X contínua
   $= \frac{F(2.5) - F(2)}{1 - F(2)} = \frac{5/8 - 1/2}{1 - 1/2} = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}$

   (b) A v.a. que representa o número de clientes que, numa amostra aleatória de 5 clientes escolhidos ao acaso nesta repartição, espera mais de 2 horas para ser atendido tem distribuição:

   ☒ $Bin(5, \frac{1}{2})$ ☐ $Poisson(\frac{5}{2})$ ☐ $Exp(\frac{2}{5})$ ☐ Nenhuma das anteriores

$Y \sim U([-1,1])$

$F_Y(c) = \begin{cases} 0 & \text{se } c < -1 \\ \frac{c+1}{2} & \text{se } -1 \le c \le 1 \\ 1 & \text{se } c > 1 \end{cases}$

formulário

$X \sim Z - 1$ onde $Z \sim N(0,1)$

Grupo II - 3 valores

$\underset{\parallel}{E[X]}$, $\underset{\parallel}{Var[X]}$ $\quad E[Y] = \frac{-1+1}{2} = 0 \quad Var[Y] = \frac{(1-(-1))^2}{12} = \frac{1}{3}$

Considere duas variáveis aleatórias independentes, X e Y, e tais que $X \sim N(-1, 1)$ e $Y \sim U([-1, 1])$.
Para cada uma das questões seguintes, assinale a resposta correta marcando x no quadrado correspondente.

1. O valor de $P(X < 0)$ é: $P(X<0) = P(Z-1<0) = P(Z<1) = P(Z \le 1) = \underbrace{P(Z \le 0)}_{0.5} + \underbrace{P(0 < Z \le 1)}_{= 0.3413 \text{ tabela}}$

   ☒ 0.8413 ☐ 0.5 ☐ 0.3413 ☐ Nenhuma das anteriores

2. O valor de $P(Y < 0)$ é: $P(Y<0) = P(Y \le 0) = F_Y(0) = \frac{0+1}{2} = 0.5$

   ☐ 0.25 ☐ 0.75 ☒ 0.5 ☐ Nenhuma das anteriores

3. O valor médio de $\frac{X}{2} - Y$ é: $E\left[\frac{X}{2} - Y\right] = \frac{1}{2}E[X] - E[Y] = \frac{1}{2} \times (-1) - 0 = -\frac{1}{2}$

   ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 0 ☒ $-\frac{1}{2}$ ☐ Nenhuma das anteriores

4. A variância de $\frac{X}{2} - Y$ é: $Var\left[\frac{X}{2} - Y\right] \underset{\text{independentes}}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^2 Var[X] + (-1)^2 Var[Y] = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

   ☐ $\frac{1}{2}$ ☒ $\frac{7}{12}$ ☐ $\frac{1}{6}$ ☐ Nenhuma das anteriores

Grupo III - 3 valores

Uma empresa tem 3 equipas, E_1, E_2 e E_3, a que recorre para entregar os seus artigos ao domicílio. A equipa E_1 entrega 30% dos artigos, a equipa E_2 entrega 50% dos artigos e a equipa E_3 entrega os restantes. Sabe-se que 20% dos artigos entregues pela equipa E_1 chegam atrasados, 10% dos artigos entregues pela equipa E_2 chegam atrasados e que 5% dos artigos entregues por E_3 chegam atrasados. Escolheu-se, ao acaso, um artigo que foi entregue ao domicílio.
Para cada uma das questões seguintes, assinale a resposta correta marcando x no quadrado correspondente.

A : artigo chegar atrasado

1. Os acontecimentos "Artigo entregue pela equipa E_1", "Artigo entregue pela equipa E_2" e "Artigo entregue com atraso" formam uma partição do espaço amostral?

   ☐ Sim ☒ Não

2. A probabilidade de o artigo não chegar atrasado e ser entregue pela equipa E_2 é de:

   $P(\bar{A} \cap E_2) = P(E_2) \times P(\bar{A} | E_2) = 0.5 \times 0.9$

   ☐ $\frac{0.5}{0.9}$ ☒ 0.9×0.5 ☐ 0.9 ☐ Nenhuma das anteriores

3. A probabilidade de o artigo chegar atrasado é de:

   $P(A|E_1) \times P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + P(A|E_3)P(E_3)$

   ☐ $0.2 + 0.1 + 0.05$ ☐ $0.8 \times 0.3 + 0.9 \times 0.5 + 0.95 \times 0.2$

   ☒ $0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.5 + 0.05 \times 0.2$ ☐ Nenhuma das anteriores

4. Sabendo que o artigo não chegou atrasado, qual a probabilidade de ter sido entregue pela equipa E_3?

   ☐ $\frac{0.2}{1-(0.2+0.1+0.05)}$ ☐ $\frac{0.2}{1-(0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.5 + 0.05 \times 0.2)}$

   ☒ $\frac{0.95 \times 0.2}{1-(0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.5 + 0.05 \times 0.2)}$ ☐ Nenhuma das anteriores

$P(E_3|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}|E_3) \times P(E_3)}{P(\bar{A})} = \frac{0.95 \times 0.2}{1 - P(A)}$

Grupo IV - 8 valores

Responda à questão 1.(a) no espaço disponibilizado para o efeito. Utilize esta página e a seguinte para responder às restantes questões deste grupo. Pode trocar a ordem, mas identifique sempre a questão a que está a responder. Se necessário, peça uma folha de teste para continuação.

No que se segue considere um dado e uma moeda, ambos equilibrados.

1. Considere a experiência aleatória que consiste em efetuar dois lançamentos consecutivos da moeda e, de seguida, lançar uma vez o dado.

   (a) Identifique o espaço amostral da experiência aleatória recorrendo ao produto cartesiano de conjuntos.

   R: $\{Cara, Coroa\} \times \{Cara, Coroa\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$

   (b) Identifique o subconjunto do espaço amostral que corresponde ao acontecimento I: "saiu face 1 no lançamento do dado" e diga, justificando, se I é um acontecimento elementar. $\{Cara, Coroa\} \times \{Cara, Coroa\} \times \{1\}$

   (c) Diga, usando a definição, se os 3 acontecimentos seguintes, A, B e C, são independentes:

   A: "saiu cara no primeiro lançamento da moeda",
   B: "saiu uma cara e uma coroa nos dois lançamentos da moeda",
   C: "saiu a face 1 no lançamento do dado".

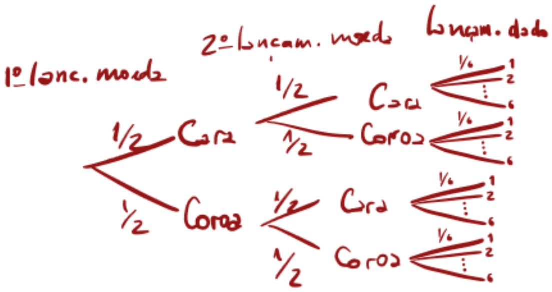
   (d) Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "Se A, B e C são 3 acontecimentos independentes então os acontecimentos A e $B \cup C$ também são acontecimentos independentes". Justifique usando a definição de acontecimentos independentes.

2. Considere agora a experiência que consiste em efetuar três lançamentos do dado e seja Z a variável aleatória que representa o número de vezes que saiu uma face inferior ou igual 2.

   a) Z tem uma distribuição conhecida. Identifique-a e determine a respetiva função de distribuição.

   b) Determine os quartis de Z.

   c) Determine $P(Z > Var[Z])$.



1) (c) $P(A) = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$P(C) = \frac{1}{6}$

$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = P(A)P(B)P(C)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A)P(B)$

$P(A \cap C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{12} = P(A)P(C)$

$P(B \cap C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} = P(B)P(C)$

Logo, os acontecimentos são independentes

d) Vejamos se A, B, C de c) são t.q. $P(A \cap (B \cup C)) = P(A) \times P(B \cup C)$.

$P(A \cap (B \cup C)) = P((A \cap B) \cup (A \cap C))$

$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P((A \cap B) \cap (A \cap C))$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = \frac{8}{24} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$

$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12}$

$= \frac{7}{12}$

$P(A) \times P(B \cup C) = \frac{7}{24} = P(A \cap (B \cup C))$

Logo, é verdade que A e $B \cup C$ são independentes.

A afirmação é verdadeira

2) $P(\text{"sair uma face inferior ou igual a 2"}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$n = 3$

$p = \frac{1}{3}$

$Z \sim Bin\left(3, \frac{1}{3}\right)$

$P(Z=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

$P(Z=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} = \frac{12}{27}$

$P(Z=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{9} = \frac{6}{27}$

$P(Z=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$

função de distribuição:

$F_Z : \mathbb{R} \to [0,1]$ dado por

$$F_Z(c) = \begin{cases} 0 & \text{se } c < 0 \\ 8/27 & \text{se } 0 \leq c < 1 \\ 20/27 & \text{se } 1 \leq c < 2 \\ 26/27 & \text{se } 2 \leq c < 3 \\ 1 & \text{se } c \geq 3 \end{cases}$$

b) $X_{0,25} = \inf\left\{c \in \mathbb{R} : F_Z(c) \geq \frac{1}{4}\right\} = 0$

$8/27 > \frac{1}{4}$

$X_{0.5} = \inf\left\{c \in \mathbb{R} : F_Z(c) \geq \frac{1}{2}\right\} = 1$

$\frac{8}{27} < \frac{1}{2}$

$\frac{20}{27} > \frac{1}{2}$

$X_{0,75} = \inf\left\{c \in \mathbb{R} : F_Z(c) \geq \frac{3}{4}\right\} = 2$

$\frac{20}{27} < \frac{3}{4}$

$\frac{26}{27} > \frac{3}{4}$

$$P(Z > \mathrm{Var}[Z]) = P\left(Z > 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{2}{3}\right) = 1 - F\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{8}{27}$$

$$= \frac{19}{27}$$