Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LEI | MIEI
2 de abril de 2022

UC - Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Teste - Elementos de Probabilidades

versão A — duração: 2 horas

| Nome: | Número: |
|---|---|

## Grupo I - 4.5 valores

Considere $X$ uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & se \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{7}{8} & se \quad 1 < x \leq 2 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases} .$$

Para cada uma das questões seguintes, assinale a resposta correcta marcando x no quadrado correspondente.

1. O valor de $P(X < 1)$ é:

   ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $0$ ☐ $\frac{1}{4}$

2. A função de distribuição de $X$ é:

   ☐ $F_X(c) = \begin{cases} 0 & se \quad c < 0 \\ \frac{c^2}{8} & se \quad 0 \leq c < 1 \\ \frac{1}{8} + \frac{7}{8}(c-1) & se \quad 1 \leq c < 2 \\ 1 & se \quad c \geq 2 \end{cases}$ ☐ $F_X(c) = \begin{cases} \frac{c^2}{8} & se \quad 0 \leq c < 1 \\ \frac{1}{8} + \frac{7}{8}(c-1) & se \quad 1 \leq c < 2 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$

   ☐ $F_X(c) = \begin{cases} 0 & se \quad c < 0 \\ \frac{1}{8} + \frac{7}{8}(c-1) & se \quad 0 \leq c < 1 \\ \frac{c^2}{8} & se \quad 1 \leq c < 2 \\ 1 & se \quad c \geq 2 \end{cases}$ ☐ $F_X(c) = \begin{cases} \frac{c^2}{8} & se \quad 0 \leq c < 1 \\ \frac{1}{8} + \frac{7}{8}(c-1) & se \quad 1 \leq c < 2 \\ 1 & se \quad c.c. \end{cases}$

3. O valor de $P\left(X = \frac{1}{2}\right)$ é:

   ☐ $\frac{1}{32}$ ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $0$ ☐ $1$

4. O valor de $P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$ é:

   ☐ $\frac{1}{32}$ ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $1$ ☐ $0$

5. O segundo quartil de $X$ é:

   ☐ $\frac{10}{7}$ ☐ $2$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{2}$

6. A distribuição de $X$ é:

   ☐ Uniforme no intervalo [0,1] ☐ Uniforme no intervalo [1,2]

   ☐ Exponencial com parâmetro $\frac{7}{10}$ ☐ Nenhuma das anteriores

## Grupo II - 3 valores

Considere a variável aleatória $Y \sim N(0,4)$.
Para cada uma das questões seguintes, assinale a resposta correcta marcando x no quadrado correspondente.

1. O valor de $P(Y < -4)$ é:
   ☐ $0$ ☐ $0.1587$ ☐ $0.9772$ ☐ $0.0228$

2. O valor de $P(|Y| \leq 2)$ é:
   ☐ $0.6826$ ☐ $0.3413$ ☐ $0.8413$ ☐ $0.5$

3. Seja $T \sim N(3,9)$. Se $T$ e $Y$ são independentes então a variável aleatória $V = T - 2Y$ tem distribuição:
   ☐ $N(3,1)$ ☐ $N(3,25)$ ☐ $N(0,1)$ ☐ Nenhuma das anteriores

4. Suponha que $Y$ representa o saldo diário de produtos de uma plataforma logística que recebe e entrega encomendas (nota: por saldo diário, entende-se o número de encomendas entregues menos o número de encomendas recebidas num mesmo dia) e assuma que os saldos em dias distintos são quantidades aleatórias independentes. A probabilidade de, ao fim de 100 dias de atividade, o saldo de encomendas ser superior a $5$ é:
   ☐ $0.4013$ ☐ $0.5$ ☐ $0.3632$ ☐ Nenhuma das anteriores

## Grupo III - 4.5 valores

Uma empresa tem 3 máquinas, $M_1$, $M_2$ e $M_3$, que utiliza para a produção dos seus artigos. A máquina $M_1$ produz $60\%$ dos artigos, a máquina $M_2$ produz $30\%$ dos artigos e a máquina $M_3$ produz os restantes. Sabe-se que $40\%$ dos artigos produzidos pela máquina $M_1$ têm defeito, $20\%$ dos artigos produzidos pela máquina $M_2$ têm defeito e que $10\%$ dos artigos produzidos pela máquina $M_3$ têm defeito. Escolheu-se, ao acaso, um artigo produzido nesta empresa.
Para cada uma das questões seguintes, assinale a resposta correcta marcando x no quadrado correspondente.

1. Os acontecimentos "Artigo escolhido tem defeito" e "Artigo escolhido não tem defeito" formam uma partição do espaço amostral?
   ☐ Sim ☐ Não

2. Os acontecimentos "Artigo escolhido tem defeito" e "Artigo escolhido é fabricado por $M_1$" formam uma partição do espaço amostral?
   ☐ Sim ☐ Não

3. A probabilidade de o artigo escolhido ter defeito e ser produzido pela fábrica $M_1$ é:
   ☐ $\frac{0.4}{0.6}$ ☐ $0.4 \times 0.6$ ☐ $0.4$ ☐ Nenhuma das anteriores

4. A probabilidade de o artigo escolhido ter defeito é de:
   ☐ $0.4 \times 0.6 + 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.1$ ☐ $0.4 + 0.2 + 0.1$
   ☐ $1$ ☐ Nenhuma das anteriores

5. Sabendo que o artigo escolhido tem defeito, qual a probabilidade de ser fabricado por $M_3$?
   ☐ $\frac{0.1 \times 0.1}{0.4 \times 0.6 + 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.1}$ ☐ $\frac{0.1}{0.4 + 0.2 + 0.1}$
   ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ Nenhuma das anteriores

6. Sabendo que o artigo escolhido não tem defeito, qual a probabilidade de ser fabricado por $M_2$ ou $M_3$?
   ☐ $1 - \frac{0.6 \times 0.6}{1 - (0.4 \times 0.6 + 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.1)}$ ☐ $1 - \frac{0.3 + 0.1}{0.4 + 0.2 + 0.1}$
   ☐ $1 - \frac{0.6 \times 0.6}{0.4 \times 0.6 + 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.1}$ ☐ $\frac{2}{3}$

**Grupo IV - 8 valores**

*Utilize esta página e a seguinte para responder às questões deste grupo. Pode trocar a ordem, mas identifique sempre a questão a que está a responder. Se necessário, peça uma folha de teste para continuar a resposta.*

---

Considere a experiência aleatória que consiste em efectuar três lançamentos consecutivos de um dado equilibrado.

1. Identifique o espaço amostral da experiência aleatória.
2. Identifique o subconjunto do espaço amostral que corresponde ao acontecimento $I$: "saíram 3 faces iguais" e diga, justificando, se $I$ é um acontecimento elementar.
3. Diga, justificando, se os 3 acontecimentos seguintes, $A$, $B$ e $C$, são independentes:

   $A$: "saiu face par no primeiro lançamento",
   $B$: "saiu face ímpar no segundo lançamento",
   $C$: "a soma das faces obtidas nos dois primeiros lançamentos é par".

4. Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "Se 3 acontecimentos são independentes 2 a 2 então são acontecimentos independentes".
5. Seja $X$ a variável aleatória que representa o número de faces par obtidas nos três lançamentos do dado.
   a) $X$ tem uma distribuição conhecida. Identifique-a e apresente a sua função massa de probabilidade.
   b) Determine a função de distribuição de $X$.
   c) Sabendo que saiu pelo menos uma face par nos três lançamentos do dado, qual a probabilidade de ter saído pelo menos uma face ímpar? Justifique apresentando os cálculos.