Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LEI | MIEI
2 de abril de 2022

UC - Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Teste - Elementos de Probabilidades

versão A — duração: 2 horas

Nome:	Número:

Grupo I - 4.5 valores

Considere X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & se \quad 0 \le x \le 1 \\ \frac{7}{8} & se \quad 1 < x \le 2 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}.$$

F. distribuição: (*)

$\boxed{c<0}$ $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx = 0$

$\boxed{0<c\le 1}$ $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^c \frac{x}{4}dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^c = \frac{c^2}{8}$

$\boxed{1<c\le 2}$ $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_1^c \frac{7}{8}dx = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}[x]_1^c = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}(c-1)$

$\boxed{c>2}$ $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx = \int_{-\infty}^{2} f(x)dx + \int_2^c 0\,dx = 1$

Para cada uma das questões seguintes, assinale a resposta correcta marcando x no quadrado correspondente.

1. O valor de $P(X<1)$ é: $P(X<1) = P(X\le 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{4}dx = \left[\frac{x^2}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{8}$
   - [x] $\frac{1}{8}$
   - [ ] $\frac{1}{2}$
   - [ ] 0
   - [ ] $\frac{1}{4}$

2. A função de distribuição de X é:

   Por (*),
   - [x] $F_X(c) = \begin{cases} 0 & se \quad c<0 \\ \frac{c^2}{8} & se \quad 0\le c<1 \\ \frac{1}{8}+\frac{7}{8}(c-1) & se \quad 1\le c<2 \\ 1 & se \quad c\ge 2 \end{cases}$
   - [ ] $F_X(c) = \begin{cases} \frac{c^2}{8} & se \quad 0\le c<1 \\ \frac{1}{8}+\frac{7}{8}(c-1) & se \quad 1\le c<2 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$
   - [ ] $F_X(c) = \begin{cases} 0 & se \quad c<0 \\ \frac{1}{8}+\frac{7}{8}(c-1) & se \quad 0\le c<1 \\ \frac{c^2}{8} & se \quad 1\le c<2 \\ 1 & se \quad c\ge 2 \end{cases}$
   - [ ] $F_X(c) = \begin{cases} \frac{c^2}{8} & se \quad 0\le c<1 \\ \frac{1}{8}+\frac{7}{8}(c-1) & se \quad 1\le c<2 \\ 1 & se \quad c.c. \end{cases}$

3. O valor de $P\left(X=\frac{1}{2}\right)$ é:

   X é contínua — $P(X=b)=0$
   - [ ] $\frac{1}{32}$
   - [ ] $\frac{1}{8}$
   - [x] 0
   - [ ] 1

4. O valor de $P\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)$ é: $P(0\le X\le \frac{1}{2}) \underset{X\text{ cont.}}{=} P(0<X\le\frac{1}{2}) = F(1/2)-F(0) = \frac{(1/2)^2}{8} - 0 = \frac{1}{32}$
   - [x] $\frac{1}{32}$
   - [ ] $\frac{1}{8}$
   - [ ] 1
   - [ ] 0

se $0\le c<1$

$0\le\frac{c^2}{8}<\frac{1}{8} \not\ge 0.5$

$\frac{1}{8}+\frac{7}{8}(c-1)\ge 0{,}5$

$\Leftrightarrow 7c-7\ge 3$

$\Leftrightarrow c\ge\frac{10}{7}$

5. O segundo quartil de X é: $X_{0.5} = \inf\{c\in\mathbb{R} : F(c)\ge 0.5\}$
   - [x] $\frac{10}{7}$
   - [ ] 2
   - [ ] $\frac{1}{4}$
   - [ ] $\frac{1}{2}$

6. A distribuição de X é:
   - [ ] Uniforme no intervalo [0,1]
   - [ ] Uniforme no intervalo [1,2]
   - [ ] Exponencial com parâmetro $\frac{7}{10}$
   - [x] Nenhuma das anteriores

A função distribuição F_Y de uma v.a. Y t.q. $Y\sim U([a,b])$ é dada por $F_Y(c) = \begin{cases} 0 & se \quad c<a \\ \frac{c-a}{b-a} & se \quad a\le c\le b \\ 1 & se \quad c>b \end{cases}$

A função distribuição F_Y de uma v.a. Y tal que $Y\sim Exp(\lambda)$ é dada por

$F_Y(c) = \begin{cases} 0 & se \quad c<0 \\ 1-e^{-\lambda c} & se \quad c\ge 0 \end{cases}$

Comparando com F_X, podemos afirmar que X não segue uma distrib. Unif. nem Exp.

OBS: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X$ tem a mesma distribuição que $\sigma Z + \mu$ onde $Z \sim N(0,1)$

Grupo II - 3 valores

Considere a variável aleatória $Y \sim N(0, 4)$. $\rightarrow Y \sim \sqrt{4} Z + 0$, onde $Z \sim N(0,1) \longrightarrow Y \sim 2Z$

Para cada uma das questões seguintes, assinale a resposta correcta marcando x no quadrado correspondente.

1. O valor de $P(Y < -4)$ é: $P(Y<-4) = P(2Z<-4) = P(Z<-\frac{4}{2}) = P(Z<-2) = P(Z>2) = 1-P(Z\leq 2) = 1-\Big(\underbrace{P(Z\leq 0)}_{=0,5} + \underbrace{P(0<Z\leq 2)}_{\substack{\text{pela tabela} \\ =0.4772}}\Big)$

   $Z \sim N(0,1)$, $P(Z<-a) = P(Z>a)$

   ☐ 0 ☐ 0.1587 ☐ 0.9772 ☒ 0.0228

2. O valor de $P(|Y| \leq 2)$ é: $P(|Y|\leq 2) = P(|2Z|\leq 2) = P(2|Z|\leq 2) = P(|Z|\leq 1) = 2P(0<Z\leq 1) = 2 \times 0.3413$

   $Z \sim N(0,1)$ tabela

   ☒ 0.6826 ☐ 0.3413 ☐ 0.8413 ☐ 0.5

$Y \sim N(0,4)$
$T \sim N(3,9)$

3. Seja $T \sim N(3, 9)$. Se T e Y são independentes então a variável aleatória $V = T - 2Y$ tem distribuição:

   ☐ $N(3,1)$ ☒ $N(3,25)$ ☐ $N(0,1)$ ☐ Nenhuma das anteriores

$T-2Y = 1\times T + (-2)\times Y$

$T-2Y \sim N(1\times 3 - 2\times 0, 1^2\times 9 + (-2)^2\times 4)$ i.e. $N(3,25)$

4. Suponha que Y representa o saldo diário de produtos de uma plataforma logística que recebe e entrega encomendas (nota: por saldo diário, entende-se o número de encomendas entregues menos o número de encomendas recebidas num mesmo dia) e assuma que os saldos em dias distintos são quantidades aleatórias independentes. A probabilidade de, ao fim de 100 dias de atividade, o saldo de encomendas ser superior a 5 é:

   ☒ 0.4013 ☐ 0.5 ☐ 0.3632 ☐ Nenhuma das anteriores

(formulário)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s independentes e tais que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, n$. Então, para quaisquer constantes reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ não todas nulas,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right).$$

T. Limite Central

$S_{100} \sim N(100\times 0, 100\times 4) = N(0, 20^2) \Downarrow S_{100} \sim 20Z$ onde $Z \sim N(0,1) \Downarrow$

$P(S_{100} > 5) = 1 - P(S_{100} \leq 5) = 1 - P(Z \leq \frac{5}{20}) = 1 - 0.5 - P(0<Z\leq 0.25) = 1 - 0.5 - 0.0987 = 0.4013$

Grupo III - 4.5 valores

Uma empresa tem 3 máquinas, M_1, M_2 e M_3, que utiliza para a produção dos seus artigos. A máquina M_1 produz 60% dos artigos, a máquina M_2 produz 30% dos artigos e a máquina M_3 produz os restantes. Sabe-se que 40% dos artigos produzidos pela máquina M_1 têm defeito, 20% dos artigos produzidos pela máquina M_2 têm defeito e que 10% dos artigos produzidos pela máquina M_3 têm defeito. Escolheu-se, ao acaso, um artigo produzido nesta empresa.

ver just. na pág. seguinte

Para cada uma das questões seguintes, assinale a resposta correcta marcando x no quadrado correspondente.

1. Os acontecimentos "Artigo escolhido tem defeito" e "Artigo escolhido não tem defeito" formam uma partição do espaço amostral?

   ☒ Sim ☐ Não

2. Os acontecimentos "Artigo escolhido tem defeito" e "Artigo escolhido é fabricado por M_1" formam uma partição do espaço amostral?

   ☐ Sim ☒ Não

3. A probabilidade de o artigo escolhido ter defeito e ser produzido pela fábrica M_1 é:

   ☐ $\dfrac{0.4}{0.6}$ ☒ 0.4×0.6 ☐ 0.4 ☐ Nenhuma das anteriores

4. A probabilidade de o artigo escolhido ter defeito é de:

   ☒ $0.4 \times 0.6 + 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.1$ ☐ $0.4 + 0.2 + 0.1$

   ☐ 1 ☐ Nenhuma das anteriores

5. Sabendo que o artigo escolhido tem defeito, qual a probabilidade de ser fabricado por M_3?

   ☒ $\dfrac{0.1 \times 0.1}{0.4 \times 0.6 + 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.1}$ ☐ $\dfrac{0.1}{0.4 + 0.2 + 0.1}$

   ☐ $\dfrac{1}{3}$ ☐ Nenhuma das anteriores

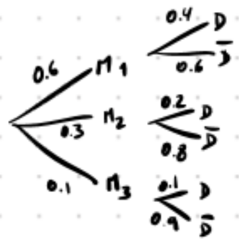
6. Sabendo que o artigo escolhido não tem defeito, qual a probabilidade de ser fabricado por M_2 ou M_3?

   ☒ $1 - \dfrac{0.6 \times 0.6}{1 - (0.4 \times 0.6 + 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.1)}$ ☐ $1 - \dfrac{0.3 + 0.1}{0.4 + 0.2 + 0.1}$

   ☐ $1 - \dfrac{0.6 \times 0.6}{0.4 \times 0.6 + 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.1}$ ☐ $\dfrac{2}{3}$

M_1, M_2, M_3

D : o artigo escolhido tem defeito



3) $P(D \cap M_1) = 0.6 \times 0.4 = 0.24$

4) $P(D) = 0.6 \times 0.4 + 0.3 \times 0.2 + 0.1 \times 0.1$

$= 0.24 + 0.06 + 0.01$

5) $P(M_3 | D) \underset{\text{F. Bayes}}{=} \dfrac{P(D|M_3) \times P(M_3)}{P(D)} = \dfrac{0.1 \times 0.1}{0.24 + 0.06 + 0.01}$

6) $P(M_2 \cup M_3 | \bar{D}) = 1 - P(M_1 | \bar{D})$

$= 1 - \dfrac{P(\bar{D} | M_1) \times P(M_1)}{P(\bar{D})} = 1 - \dfrac{0.6 \times 0.6}{1 - P(D)}$

Grupo IV - 8 valores

Utilize esta página e a seguinte para responder às questões deste grupo. Pode trocar a ordem, mas identifique sempre a questão a que está a responder. Se necessário, peça uma folha de teste para continuar a resposta.

Considere a experiência aleatória que consiste em efectuar três lançamentos consecutivos de um dado equilibrado.

1. Identifique o espaço amostral da experiência aleatória. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$
2. Identifique o subconjunto do espaço amostral que corresponde ao acontecimento I: "saíram 3 faces iguais" e diga, justificando, se I é um acontecimento elementar. $I = \{(a,a,a) : a \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ $\quad \#I \neq 1 \Downarrow$ I não é elementar
3. Diga, justificando, se os 3 acontecimentos seguintes, A, B e C, são independentes:

   A: "saiu face par no primeiro lançamento",
   B: "saiu face ímpar no segundo lançamento",
   C: "a soma das faces obtidas nos dois primeiros lançamentos é par".

4. Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "Se 3 acontecimentos são independentes 2 a 2 então são acontecimentos independentes".
5. Seja X a variável aleatória que representa o número de faces par obtidas nos três lançamentos do dado.
   a) X tem uma distribuição conhecida. Identifique-a e apresente a sua função massa de probabilidade.
   b) Determine a função de distribuição de X.
   c) Sabendo que saiu pelo menos uma face par nos três lançamentos do dado, qual a probabilidade de ter saído pelo menos uma face ímpar? Justifique apresentando os cálculos.

3) $P(A \cap B \cap C) = 0$ pois se ocorre A e ocorre B, sai face par no 1º lançamento e sai face ímpar no 2º lançamento

Logo, a soma das faces obtidas nos dois primeiros lançamentos é ímpar e C não pode ocorrer.

$P(A)P(B)P(C) \neq 0$, pois $P(A)>0$, $P(B)>0$, $P(C)>0$

Assim, $P(A)P(B)P(C) \neq P(A \cap B \cap C)$

Portanto, A, B e C não são independentes

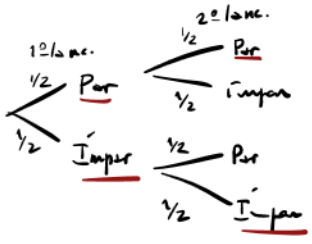
4) Consideremos os acontecimentos A, B, C de 3).

$P(A) = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{1}{2}$

$P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(a soma das faces obtidas nos 2 lançamentos é par se forem ambos par ou ambos ímpar)



$$\boxed{\begin{aligned} P(A \cap B) &= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} = P(A)P(B) \\ P(A \cap C) &= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} = P(A)P(C) \\ P(B \cap C) &= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} = P(B)P(C) \end{aligned}}$$

os acontecimentos são independentes dois a dois mas, como vimos em 3), não são independentes

$\Downarrow$

A afirmação é falsa

5) a) $X \sim Bin(3, \frac{1}{2})$

3 lançamentos

prob. de sair face par

$$P(X=0) = \binom{3}{0} \times \frac{1}{2}^0 \times \left(1-\frac{1}{2}\right)^3 = 0.5^3 = 0.125$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \times \frac{1}{2}^1 \times \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \times 0.5^3 = 0.375$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \times \frac{1}{2}^2 \times \left(1-\frac{1}{2}\right)^1 = 3 \times 0.5^3 = 0.375$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3} \times \frac{1}{2}^3 \times \left(1-\frac{1}{2}\right)^0 = 0.5^3 = 0.125$$

f.m.p. de X :

$$X: \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.125 & 0.375 & 0.375 & 0.125 \end{cases}$$

b)

$F : \mathbb{R} \to [0,1]$ dada por

$$F(c) = \begin{cases} 0 & \text{se } c<0 \\ 0.125 & \text{se } 0 \leq c < 1 \\ 0.5 & \text{se } 1 \leq c < 2 \\ 0.875 & \text{se } 2 \leq c < 3 \\ 1 & \text{se } c \geq 3 \end{cases}$$

c)

$$P(X \leq 2 \mid X \geq 1) = \frac{P(X \leq 2, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(1 \leq X \leq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X=1) + P(X=2)}{1 - P(X<1)} =$$

$$= \frac{0.375 + 0.375}{1 - P(X=0)} = \frac{0.75}{1-0.125} = \frac{0.75}{0.875} = \frac{750}{875} = \frac{6}{7}$$