Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LEI | MIEI
2023/2024

Elementos de Probabilidades
e
Teoria de Números

Teoria de Números - folha 1

1. Determine o quociente e o resto na divisão de :
   (a) 310156 por 197;
   (b) 32 por 45;
   (c) 0 por 28;
   (d) -19 por 6;
   (e) -234 por -9.

2. Na divisão de 392 por 45, determine:
   (a) o maior inteiro que se pode somar ao dividendo sem alterar o quociente;
   (b) o maior inteiro que se pode subtrair ao dividendo sem alterar o quociente.

3. Mostre que, se $a \mid (2x - 3y)$ e $a \mid (4x - 5y)$, então $a \mid y$, para quaisquer inteiros a, x e y.

4. Sejam $x, y \in \mathbb{Z}$ dois números ímpares. Mostre que $2 \mid (x^2 + y^2)$ mas $4 \nmid (x^2 + y^2)$.

5. Utilizando o Algoritmo da Divisão, mostre que
   (a) o quadrado de um inteiro é da forma $3k$ ou $3k + 1$, para certo inteiro não negativo k;
   (b) $3a^2 - 1$ não é um quadrado perfeito, para todo o inteiro a.

6. Mostre que, para todo o inteiro a, um dos inteiros a e $a + 2$ ou $a + 4$ é divisível por 3.

7. Seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $3 \mid n(2n^2 + 7)$.

8. Verifique que, dados um inteiro positivo n e um inteiro a, $\text{m.d.c.}(a, a + n)$ divide n. Conclua que dois inteiros consecutivos são primos entre si.

9. Mostre que se k é um inteiro positivo, então $3k + 2$ e $5k + 3$ são números primos entre si.

10. Utilizando o Algoritmo de Euclides, determine o máximo divisor comum de cada par de inteiros a e b e escreva-o como combinação linear de a e b:
    (a) $a = 1001$, $b = 357$.
    (b) $a = 1001$, $b = 33$.
    (c) $a = 56$, $b = 126$.
    (d) $a = -90$, $b = 1386$.
    (e) $a = -2860$, $b = -2310$.

11. Determine, usando o Algoritmo de Euclides, inteiros x e y que satisfaçam:
    (a) $\text{m.d.c.}(56, 72) = 56x + 72y$;
    (b) $\text{m.d.c.}(24, 138) = 24x + 138y$.

Elementos de Probabilidades
e
Teoria de Números

Teoria de Números - folha 2

12. Determine o menor inteiro positivo k da forma $k = 22x + 55y$, onde x e y são inteiros.

13. Quais das seguintes equações diofantinas têm solução?
    (a) $6x + 51y = 22$;
    (b) $33x + 14y = 115$;
    (c) $14x + 35y = 93$.

14. Determine as soluções inteiras das seguintes equações diofantinas:
    (a) $56x + 72y = 40$;
    (b) $24x + 138y = 18$;
    (c) $221x + 35y = 11$.

15. Determine as soluções inteiras positivas das seguintes equações diofantinas:
    (a) $18x + 5y = 48$;
    (b) $54x + 21y = 906$;
    (c) $5x - 11y = 29$.

16. De quantas maneiras se pode exprimir o número 4 como diferença de dois inteiros positivos, dos quais o primeiro é divisível por 8 e o segundo é múltiplo de 15? Indique três delas.

17. Determine dois inteiros, um positivo e outro negativo, cuja soma é 42 e tais que um deles é múltiplo de 126 e o outro é divisível por 56.

18. (a) Para que valores de x e de y se tem $11x + 7y = 200$?
    (b) Para que valores encontrados em (a) se tem $3x + y$ múltiplo de 3?

19. Um teatro amador cobra $1,80$ euros de entrada a cada adulto e 75 cêntimos a cada criança. Num espetáculo, as receitas totais somaram 90 euros. Sabendo que estiveram presentes mais adultos do que crianças, diga quantas pessoas estiveram a assistir a esse espetáculo.

20. Uma loja de gelados vende gelados de três sabores diferentes: baunilha, morango e chocolate. Cada cliente pode comprar um cone com uma, duas ou três bolas de gelado, mas não é permitido repetir sabores no mesmo cone. Cada bola de gelado de baunilha custa 1,00 euro, cada bola de gelado de morango custa 1,50 euros e cada bola de gelado de chocolate custa 2,00 euros. O cone de duas bolas tem um desconto de 0,31 euros e o cone de 3 bolas tem um desconto de 0,71 euros. No final do dia, foram vendidas 63 bolas de gelado de baunilha, 61 bolas de gelado de morango e 56 bolas de gelado de chocolate e havia 249,75 euros em caixa. Sabendo que cada cliente comprou apenas um gelado, quantos clientes foram servidos nesse dia?

Universidade do Minho | LEI | MIEI
Departamento de Matemática | 2023/2024

Elementos de Probabilidades
e
Teoria de Números

Teoria de Números - folha 3

21. Prove que

    (a) todo o primo da forma $3n+1$ é da forma $6m+1$ $(m, n \in \mathbb{N})$;
    (b) o único primo da forma n^3-1 é o 7 $(n \in \mathbb{N})$;
    [Sugestão: Escreva n^3-1 como $(n-1)(n^2+n+1)$.]
    (c) todo o inteiro da forma n^4+4, em que $n>1$, é composto.

22. Usando a fatorização de 507 e 1287 em fatores primos, determine $\text{m.d.c.}(507, 1287)$ e $\text{m.m.c.}(507, 1287)$.

23. Verifique se 701 é um número primo, testando todos os primos $p \leq \sqrt{701}$ como possíveis divisores.

24. Justifique, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

    (a) $91 \equiv_7 0$;
    (b) $-2 \equiv_8 2$;
    (c) $17 \not\equiv_2 13$.

25. Para que valores de n se tem $25 \equiv_n 4$?

26. Dê um exemplo que mostre que $a^2 \equiv_n b^2$ não implica que $a \equiv_n b$.

27. Determine quais dos seguintes conjuntos são sistemas completos de resíduos módulo 5:

    (a) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$;
    (b) $\{0, 5, 10, 15, 20\}$;
    (c) $\{5, 11, 2, 13, 29\}$;
    (d) $\{-6, -3, 0, 3, 6\}$.

28. Indique, justificando, caso existam:

    (a) um inteiro primo x tal que $x \in [-22]_{15} \cap [8]_{15}$;
    (b) dois elementos x, y em $[20]_{15} \times ([39]_{15} + [-80]_{15})$ tais que $-40 < x < 0$ e $y > 80$;
    (c) um número primo x tal que $x \equiv_{12} 6$;
    (d) dois elementos distintos em $[-182]_9 \cap [20]_9$;
    (e) o maior número par n tal que $-89 \equiv_n 5$;
    (f) o maior inteiro x par, não positivo, tal que $x \equiv_{159} 50$.

29. Determine o resto da divisão de $2357 \times 1036 + 499$ por 11.

30. Na divisão por 5, um inteiro p admite resto 3. Qual é o resto da divisão de p^2+2p-1 por 5?

Elementos de Probabilidades
e
Teoria de Números

Teoria de Números - folha 4

31. Indique os restos das divisões de 2^{50} e 41^{63} por 7.

32. Calcule o resto da divisão de 4^{215} por 9.

33. Mostre que $11^{10} \equiv_{100} 1$.

34. Mostre que, para qualquer inteiro n, $n^3 - n = 3k$, para certo inteiro k.

35. Prove que

    (a) dado um inteiro a, o dígito das unidades de a^2 é 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

    (b) qualquer um dos inteiros $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ pode ser o dígito das unidades de a^3, para algum inteiro a;

    (c) dado um inteiro a, o dígito das unidades de a^4 é 0, 1, 5 ou 6.

36. Determine os algarismos x, y de modo que o inteiro $\overline{3x5y}$ seja simultaneamente divisível por 4 e por 9.

37. Determine os dígitos x e y tais que o número $\overline{34xx58y}$ é simultaneamente divisível por 9 e por 11.

38. Resolva as seguintes congruências lineares:

    (a) $25x \equiv_{29} 15$;

    (b) $5x \equiv_{26} 2$;

    (c) $140x \equiv_{301} 133$.

39. Diga, justificando, quais das congruências seguintes são solúveis e, para essas, indique a menor solução não negativa:

    (a) $12x \equiv_{16} 6$

    (b) $12x \equiv_{35} 7$

    (c) $12x \equiv_{35} 24$

    (d) $10x \equiv_{16} 14$

    (e) $60x \equiv_{165} -30$

40. Diga, justificando, se a congruência linear $14x \equiv_{60} 18$ tem soluções pares.

41. Relativamente à congruência $13x \equiv_{42} 17$, determine, caso existam,

    (a) as soluções negativas superiores a -100;

    (b) uma solução par.

42. Considere a congruência linear $18x \equiv_{21} 9$.

    (a) Verifique que a congruência linear dada admite solução.

    (b) Quantas soluções tem a congruência linear no intervalo $]-1, 80]$? Calcule-as.

Elementos de Probabilidades
e
Teoria de Números

Teoria de Números - folha 5

43. Resolva os seguintes sistemas de congruências lineares:

$$(a)\begin{cases} x \equiv_3 1 \\ x \equiv_5 2 \\ x \equiv_7 3 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} x \equiv_2 1 \\ x \equiv_5 2 \\ x \equiv_7 5 \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} x \equiv_4 1 \\ x \equiv_6 5 \\ x \equiv_7 4 \end{cases};$$

$$(d)\begin{cases} x \equiv_2 1 \\ x \equiv_3 2 \\ x \equiv_6 5 \\ x \equiv_{12} 5 \end{cases} \qquad (e)\begin{cases} 2x \equiv_5 1 \\ 3x \equiv_6 9 \\ 4x \equiv_7 1 \\ 5x \equiv_{11} 9 \end{cases} \qquad (f)\begin{cases} 3x \equiv_5 2 \\ 2x \equiv_6 4 \\ x \equiv_2 1 \end{cases}$$

44. Resolva a congruência linear $17x \equiv_{42} 5$.

45. Determine as soluções inteiras da congruência linear $19x \equiv_{84} 4$ que pertençam ao intervalo $]-200, 284]$.

46. Determine os inteiros positivos x inferiores a 336 e tais que $x \equiv_8 2$, $x \equiv_7 1$ e $x \equiv_6 2$.

47. Um inteiro positivo a dividido por 5 dá resto 3 e dividido por 9 dá resto 4. Determine o resto da divisão de a por 45.

48. Indique três inteiros n, dos quais um é negativo e dois são positivos, para os quais se tem, simultaneamente, $3 \mid n$, $5 \mid (n+2)$ e o resto da divisão de $n-3$ por 9 é 6.

49. Quando se retiram $2, 3, 4, 5, 6$ ovos de cada vez de um determinado cesto, ficam, respetivamente, $1, 2, 3, 4, 5$ ovos no cesto. Ao retirar 7 ovos de uma só vez, não sobra quaquer ovo no cesto. Qual o menor número de ovos que o cesto pode conter?

50. Um bando de 17 piratas roubou um saco de moedas. Ao tentarem dividir igualmente por todos eles a fortuna roubada, deram conta que sobravam 3 moedas. Lutaram, para ver quem ficava com as três moedas e, nessa luta, morreu um pirata. Distribuíram, de novo, as moedas por todos e, desta vez, sobraram 10 moedas. Tendo havido nova luta, mais um pirata morreu. Desta vez, a fortuna pôde ser distribuída, na íntegra, por todos! Qual é o número mínimo de moedas que o saco roubado poderia ter contido?

Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Elementos de Probabilidades
e
Teoria de Números

Teoria de Números - folha 6

51. Recorrendo ao Pequeno Teorema de Fermat, mostre que:
    (a) $a^{21} \equiv_{15} a$, para todo o inteiro a;
    (b) $a^{13} \equiv_{273} a$, para todo o inteiro a;
    (c) $a^{12} \equiv_{35} 1$, para todo o inteiro a tal que $\mathrm{m.d.c.}(a, 35) = 1$.

52. Mostre que 60 divide $a^4 + 59$ se $\mathrm{m.d.c.}(a, 30) = 1$.

53. Se $a \in \mathbb{Z}$ é tal que $7 \nmid a$, prove que $a^3 + 1$ ou $a^3 - 1$ é divisível por 7.

54. Considere a função de Euler ϕ. Calcule $\phi(420)$, $\phi(1001)$, $\phi(5040)$.

55. Verifique que $\phi(n + 2) = \phi(n) + 2$, para $n = 12, 14, 20$.

56. Verifique o Teorema de Euler para $n = 10$ e $a = 3$.

57. Seja $a \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathrm{m.d.c.}(a, 15) = 1$. Mostre que $a^{17} \equiv_{15} a$:
    (a) recorrendo ao Pequeno Teorema de Fermat;
    (b) recorrendo ao Teorema de Euler.

58. Quais os dois últimos dois dígitos na representação decimal de 3^{256}?

59. Mostre que se n é um número inteiro ímpar que não é múltiplo de 5 então n divide um inteiro cujos dígitos são todos iguais a 1.

60. Por que é que se tem $\phi(2n) = \phi(n)$ para qualquer inteiro positivo ímpar n?

61. Seja p um número primo. Mostre que $2 \times (p - 3)! \equiv_p -1$.

62. Determine
    (a) o resto da divisão de $15!$ por 17;
    (b) o resto da divisão de $2 \times 26!$ por 29.

63. Mostre que que $4 \times 29! + 5!$ é divisível por 31.